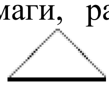
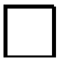
VI Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2010

13 января 2010 года, 9.00–13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Найдите все простые числа p, q такие, что $p^3 - q^7 = p - q$.

2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и AD равны. На сторонах BC и CD отмечены точки M и N соответственно так, что $MN = BM + DN$. Прямые AM и AN вторично пересекают описанную окружность четырехугольника $ABCD$ в точках P и Q соответственно.

Докажите, что точка пересечения высот треугольника APQ лежит на отрезке MN.

3. Прямоугольник, образованный линиями клетчатой бумаги, разбивается на фигурки трех видов: равнобедренные прямоугольные треугольники  с основанием в две клетки, квадраты  из одной клетки, и параллелограммы , ограниченные двумя сторонами и двумя диагоналями клеток (фигурки могут быть ориентированы произвольным образом).

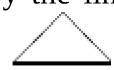
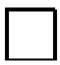
Докажите, что в любом разбиении количество фигурок третьего вида четно.

VI International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2010

13 January, 2010, 9.00–13.30
First day
(Each problem is worth 7 points)

1. Find all primes p, q such that $p^3 - q^7 = p - q$.

2. In a cyclic quadrilateral $ABCD$ with $AB = AD$ points M, N lie on the sides BC and CD respectively so that $MN = BM + DN$. Lines AM and AN meet the circumcircle of $ABCD$ again at points P and Q respectively. Prove that the orthocenter of the triangle APQ lies on the segment MN.

3. A rectangle formed by the lines of checkered paper is divided into figures of three kinds: isosceles right triangles  with base of two units, squares  with unit side, and parallelograms  formed by two sides and two diagonals of unit squares (figures may be oriented in any way). Prove that the number of figures of the third kind is even.