Задача 4. Дан квадратный трехчлен $p(x)$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n, для которого уравнение $p(x)=\frac{1}{n}$ не имеет рациональных корней.

Решение. Предположим, что квадратичный трехчлен $p(x)=ax^2+bx+c$ принимает все значения вида $\frac{1}{n}$ в рациональных точках. Ясно, что в этом случае коэффициенты a,b,c являются рациональными. Действительно, если $p(r_i)=\frac{1}{n_i}$ для i=1, 2, 3, где r_i - различные рациональные числа, тогда числа $a(r_1+r_2)+b=\frac{p(r_2)-p(r_1)}{r_2-r_1}$ и $a(r_2+r_3)+b=\frac{p(r_3)-p(r_2)}{r_3-r_2}$ также являются рациональными, и значит, их разность $a(r_1-r_3)$ рациональна. Следовательно, a, и поэтому b и c являются рациональными числами.

Если a,b,c представимы в виде несократимых дробей и простое число q не делит их знаменатели и числители, то для рациональных чисел, представимых в виде несократимых дробей $\frac{m}{n}$ со знаменателей, кратным q^k, k>0, и k – максимальная степень q, на которую делится n, знаменатель несократимой дроби $p(r)=ar^2+br+c=\frac{am^2+bmn+cn^2}{n^2}$ делится на q^{2k} и не делится на q^{2k+1}. Поэтому число $p(r)$ не может быть равно $\frac{1}{q^s}$ для любого нечетного s. А поскольку q не делит знаменатели чисел a,b,c, то для n не кратных q уравнение $p\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{q^s}$ также невозможно. Таким образом, $n=q^s$ удовлетворяют условию для всех нечетных s.

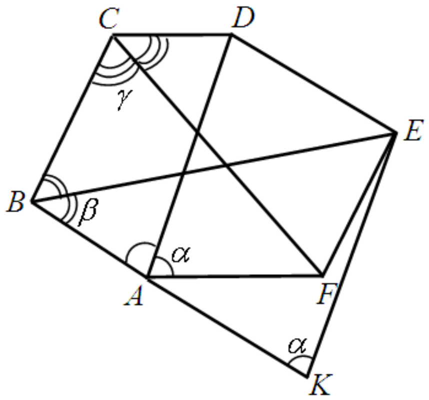
Задача 5. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB\parallel DE$, $BC\parallel EF$, $CD\parallel FA$. Расстояние между прямыми AB и DE равно расстоянию между прямыми BC и EF и расстоянию между прямыми CD и FA. Докажите, что сумма $AD+BE+CF$ не превосходит периметра шестиугольника $ABCDEF$.

Решение. Докажем сначала следующее утверждение

Лемма. При выполнении условий задачи справедливо равенство $AD^2=(AB+DE)(FA+CD)$.

Действительно, точка D равноудалена от прямых AB и FA. Следовательно, $\angle BAD=\angle FAD$. Поскольку $AB\parallel DE$, $CD\parallel FA$, то $\angle BAD=\angle FAD=\angle ADE=\angle ADC$. Аналогично, $\angle ABE=\angle CBE=\angle FEB=\angle DEB$ и $\angle BCF=\angle DCF=\angle CFA=\angle CFE$.

Положим $\angle BAD=\alpha$, $\angle ABE=\beta$ и $\angle BCF=\gamma$.



Поскольку сумма внутренних углов шестиугольника равна 720°, то справедливо равенство $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

Рассмотрим параллелограмм $ADEK$. Ясно, что $BK = BA + AK = BA + DE$, $KE = AD$, $\angle AKE = \angle BAD = \alpha$, $\angle KBE = \angle ABE = \beta$, $\angle BEK = \gamma$.

Отсюда, треугольники со сторонами $AD, AB+DE, BE$ и $FA+CD, AD, CF$ подобны. Значит, $AD^2 = (AB+DE)(FA+CD)$.

Следовательно, согласно Лемме и неравенству Коши имеем:

$$AD = \sqrt{(AB+DE)(FA+CD)} \le \frac{AB+DE+FA+CD}{2}.$$

Аналогично,

$$BE \le \frac{AB+BC+EF+ED}{2},\ CF \le \frac{BC+CD+EF+FA}{2}.$$

Из последних трех неравенств следует, что

$$AD+BE+CF \le AB+BC+CD+DF+EF+FA.$$

Задача 6. Таблица 10×10 разбита на 100 единичных квадратиков. Назовем *блоком* любой квадрат 2×2, состоящий из четырех единичных квадратиков этой таблицы. Множество *C*, состоящее из *n* блоков, покрывает таблицу (т.е. каждый единичный квадратик таблицы накрыт некоторым блоком из *C*), но никакие $n-1$ блоков из *C* эту таблицу не покрывают. Найдите наибольшее возможное значение *n*.

Решение. Рассмотрим бесконечную таблицу, разделенную на единичные ячейки. Любой квадрат 2×2, состоящий из 4 ячеек таблицы, будем называть также *блоком*.

Зафиксируем произвольное множество *M* блоков, содержащихся в таблице. Рассмотрим далее произвольное множество единичных ячеек таблицы, которые покрываются *M*. Для каждого множества Φ через $|\Phi|$ обозначим наименьшее возможное количество блоков *M*, которые необходимы для покрытия всех ячеек Φ. Ясно, что для указанных обозначений выполнены следующие свойства.

1°. Если $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$, то $|\Phi_1| \le |\Phi_2|$.

2°. $|\Phi_1 \cup \Phi_2| \le |\Phi_1| + |\Phi_2|$.

3°. Для множества A, указанного на рис.1, имеем $|A| = 2$; для множества B, указанного на рис.2, выполнено $|B| = 3$.

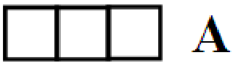


Рис. 1

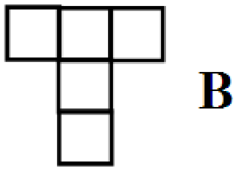


Рис. 2

4°. Пусть C – произвольный прямоугольник 3×6 из таблицы. Тогда $|C| \le 10$.

Указанная оценка доказывается рассмотрением различных способов покрытия ячеек X и Y (см. рис.3-8) блоками из M.

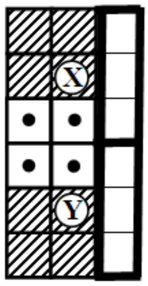


Рис. 3

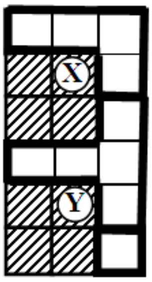


Рис. 4

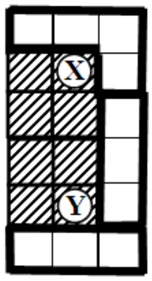


Рис. 5

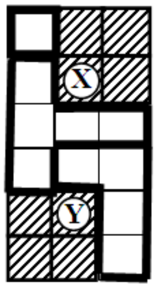


Рис. 6

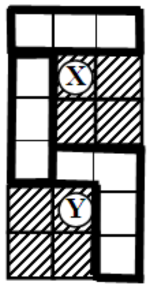


Рис. 7

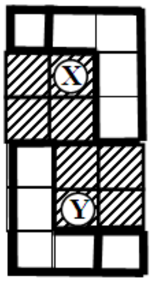


Рис. 8

Для этих фигур имеем соответствующие оценки:

Fig. 3 : Случай 1) $|C| \le 2+2+3+1+1$ или Случай 2) $|C| \le 1+1+1+1+1+1+1+1$;

Fig. 4 : $|C| \le 3+3+1+1+1$;

Fig. 5 : $|C| \le 2+2+3+1+1$;

Fig. 6 : $|C| \le 3+3+1+1+1$;

Fig. 7 : $|C| \le 2+2+3+1+1$;

Fig. 8 : $|C| \le 3+3+1+1+1+1$.

Замечание 1. На рисунке 3 первый случай означает, что четыре отмеченные клетки покрываются самое большее 3 блоками; во втором же случае для покрытия четерех отмеченных ячеек необходимо не менее 4 различных блоков.

Замечание 2. На рисунке 8 представлен только один случай, где $|C|$ может достигать значение 10; на остальных рисунках мы имеем $|C| \le 9$.

5°. Пусть D – произвольный квадрат 6×6 из таблицы. Из предыдущих свойств следует, что $|D| \le 20$. Потребуем, чтобы на самом деле было выполнено неравенство $|D| \le 19$. Это легко сделать из рис. 9 и замечания 2 (используя два различных разбиения D на 2 прямоугольника 3×6).

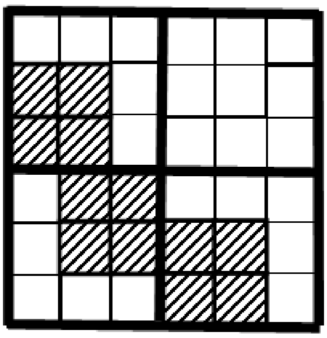


Рис. 9

Теперь мы можем закончить решение задачи. Пусть E заданная таблица 10×10, D – её центральный квадрат 6×6. Тогда $|D|\leq19$. Нетрудно убедиться, что $|E\setminus D|\leq20$ (применяя свойства 1°-4°). Таким образом, $|E|\leq|D|+|E\setminus D|\leq19+20=39$. С другой стороны, на рис.10 показано, что можно покрыть с помощью $n=39$ блоков.

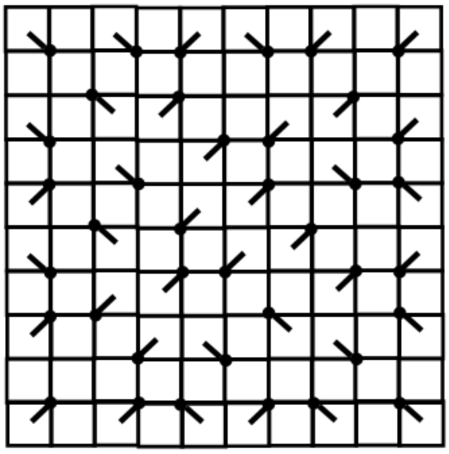


Fig. 10

На рисунке отмечены центры блоков, участвующие в покрытии.

Для удобства мы отметили полудиагоналями, те элементарные ячейки, которые покрыты единственным блоком.