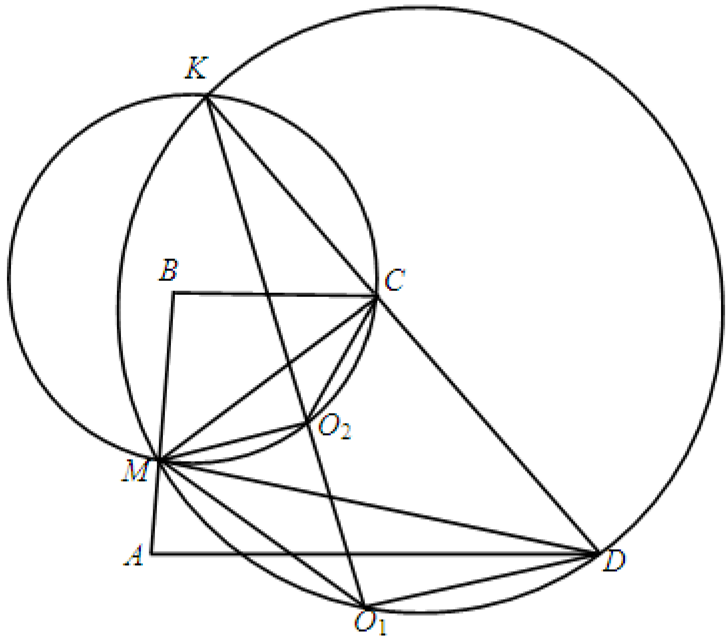
**Задача 1.** Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), в которой $\angle ABC > 90^\circ$. На боковой стороне $AB$ отмечена точка $M$. Обозначим через $O_1$ и $O_2$ центры описанных около треугольников $MAD$ и $MBC$ окружностей соответственно. Известно, что описанные около треугольников $MO_1D$ и $MO_2C$ окружности вторично пересекаются в точке $N$. Докажите, что прямая $O_1O_2$ проходит через точку $N$.

**Решение.**




Поскольку $\angle MO_2C = 360^\circ - 2\angle MBC = 2\angle MAD = \angle MO_1D$, то $\Delta MO_1D \sim \Delta MO_2C$. Отсюда,

$$\frac{MC}{MD} = \frac{MO_2}{MO_1} \tag{1}$$

и $\angle CMO_2 = \angle O_1MD$.

Следовательно,

$$\angle O_1MO_2 = \angle DMC. \tag{2}$$

В силу равенств (1) и (2) имеем

$$\Delta O_1MO_2 \sim \Delta DMC. \tag{3}$$

Из (3) следует, что $\angle MO_1K = \angle MDK$, где $K$ – точка пересечения прямых $O_1O_2, CD$. Следовательно, точки $M, O_1, D, K$ лежат на некоторой окружности. Таким образом, $\angle CMO_2 = \angle O_1MD = \angle O_1KD$. Значит, $\angle CMO_2 = \angle O_2KC$, т.е. точки $M, O_2, C, K$ также лежат на некоторой окружности. Тем самым, доказано, что точки $K$ и $N$ совпадают, т.е. прямая $O_1O_2$ проходит через точку $N$.

**Задача 2.** Найдите все нечетные натуральные $n > 1$ такие, что существует перестановка $a_1, a_2, ..., a_n$ чисел $1, 2, ..., n$, в которой при всех $k, 1 \le k \le n$, одно из чисел $a_k^2 - a_{k+1} - 1$ и $a_k^2 - a_{k+1} + 1$ делится на $n$ (здесь мы считаем $a_{n+1} = a_1$).

**Решение 1.** Поскольку $\{a_1, a_2, ..., a_n\} = \{1, 2, ..., n\}$, то $a_i - a_j \,\vdots\, n$, только если $i = j$. Согласно условию задачи справедливы соотношения

$$a_{k+1} = a_k^2 + \varepsilon_k - nb_k, \tag{4}$$

где $b_k \in Z$ и $\varepsilon_k = \pm 1$. Значит, $a_{k+1} - a_{l+1} = (a_k - a_l)(a_k + a_l) + (\varepsilon_k - \varepsilon_l) - n(b_k - b_l)$. Отсюда, если $a_k + a_l = n$, то $\varepsilon_k \neq \varepsilon_l$, иначе $a_{k+1} - a_{l+1} \vdots n$, что невозможно. Условие $\varepsilon_k \neq \varepsilon_l$ означает, что $\varepsilon_k = -\varepsilon_l$.

Далее один из $a_i$ равен $n$. Для определенности пусть $a_m = n$. Тогда множество $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \setminus \{a_m\}$ может быть разбито на $\frac{n-1}{2}$ пар $(a_k, a_l)$ таких, что $a_k + a_l = n$. Для каждой такой пары с индексами $k, l$ имеем $\varepsilon_k + \varepsilon_l = 0$. Сложим все равенства вида (4) для всех $k = 1, 2, ..., n$. Тогда $\sum_{k=2}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - n\sum_{k=1}^{n} b_k + \varepsilon_m$, или $1 + 2 + ... + n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 - n\sum_{k=1}^{n} b_k + \varepsilon_m$, следовательно,

$$n\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + \varepsilon_m = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \varepsilon_m. \quad (5)$$

Заметим, что если число $n$ не кратно $3$, то число $\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$ делится на $n$ (поскольку $\frac{(n+1)(n-1)}{3}$ является целым). Отсюда и из (5) следует, что $\varepsilon_m \vdots n$, что невозможно.

Таким образом, $n$ кратно 3 и из (5) следует, что число $\varepsilon_m$ делится на число $\frac{n}{3}$. Последнее возможно только для $n = 3$, поскольку $\varepsilon_m = \pm 1$. Значит, только число $n = 3$ удовлетворяет условию задачи. Действительно, пусть $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$. Тогда $a_1^2 - a_2 + 1 = 0 \vdots 3$, $a_2^2 - a_3 - 1 = 0 \vdots 3$ и $a_3^2 - a_1 + 1 = 9 \vdots 3$.

**Решение 2.** Положим, что $a_1, a_2, ..., a_n$ – является необходимой последовательностью остатков по модулю *n*, и пусть $f(a_i) = a_{i+1}$ (для $i = n$ положим $f(a_n) = a_1$).

Ясно, что указанная функция $f$ является биективной. Согласно условию задачи имеем $f(x) \equiv x^2 + 1 (\mathrm{mod}\ n)$ или $f(x) \equiv x^2 - 1 (\mathrm{mod}\ n)$. Если $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 (\mathrm{mod}\ n)$, то среди чисел $f(x), f(y), f(z)$ не более двух чисел имеют различные остатки по модулю *n*, что невозможно. С другой стороны, $f(x) \equiv f(-x) (\mathrm{mod}\ n)$, поэтому, если $x^2 \equiv y^2 (\mathrm{mod}\ n)$, то $x \equiv \pm y (\mathrm{mod}\ n)$ или одно из чисел *x* или *y* равно 0. Отсюда, число *n* не может иметь два различных простых делителя (иначе существуют *x* и *y* не делящиеся на *n* такие, что *n* делит число (*x*+*y*)(*x*-*y*)). Кроме того, *n* не может делиться на квадрат простого числа: если $p^2$ делит *n*, то $0^2 \equiv \left(\frac{n}{p}\right)^2 \equiv \left(\frac{2n}{p}\right)^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)$. Таким образом, *n* является простым числом.

Как известно, среди остатков 0, 1, …, *n*-1 по простому модулю *n*=2*k*+1 количество квадратичных вычетов равно *k*+1, а квадратичных невычетов – *k*.

Отметим, что каждый остаток должен иметь соседа, являющегося квадратичным вычетом, таким образом, нет двух квадратичных невычетов отличающихся на 2. Если $a^2 - b^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ n)$, т.е. $a^2 - 1 \equiv b^2 + 1 (\mathrm{mod}\ n)$, тогда среди чисел *f(a), f(-a), f(b), f(-b)* только три являются различными, значит, 0 совпадает с *a* или *b*. Тем самым, каждая группа последовательных квадратичных вычетов состоит из двух различных остатков (с одним только возможным исключением, когда эта группа содержит три различных остатка, и 0 не содержится в этой группе), и каждая группа последовательных квадратичных невычетов состоит из двух остатков (с одним только возможным исключением, когда она состоит только из одного числа, следующего за 0). Поскольку количество квадратичным вычетов превышает количество квадратичных невычетов на 1, то возможны только два случая.

В первом случае 0, 1, 2 являются квадратичными вычетами, а числа 3, 4 являются квадратичными невычетами, тем самым, пришли к противоречию.

Во втором случае все остатки вида $4k<n$ и $4k+1<n$ являются квадратичными вычетами, а остальные остатки – квадратичные невычеты. Для $n>6$ это означает, что 2, 3, 6 являются квадратичными невычетами, что невозможно (поскольку произведение квадратичного невычета на квадратичный вычет, отличный от нуля, является квадратичным невычетом, а произведение двух квадратичным невычетов должно быть квадратичным вычетом).

Таким образом, $n \le 5$. Непосредственно проверкой можно убедиться, что среди указанных нечетных чисел условию задачи удовлетворяет только $n=3$.

**Задача 3.** Пусть $a,b,c,d>0$ и $abcd=1$. Докажите неравенство
$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c}+\frac{(b-1)(d+1)}{1+cd+d}+\frac{(c-1)(a+1)}{1+ad+a}+\frac{(d-1)(b+1)}{1+ab+b}\ge 0\,.$$
**Решение 1.** Несложно показать, что исходное неравенство эквивалентно следующему неравенству
$$\frac{ac+a+bc}{1+bc+c}+\frac{bd+b+cd}{1+cd+d}+\frac{ac+c+ad}{1+ad+a}+\frac{db+d+ab}{1+ab+b}\ge 4\,.$$

Поскольку справедливо неравенство
$$ac+a+bc=\frac{(c+1)^2}{\frac{c+1}{a}}+\frac{(bc)^2}{bc}\ge\frac{(c+1+bc)^2}{\frac{c+1}{a}+bc}=\frac{ad(c+1+bc)^2}{cd+d+1},$$
или $\dfrac{ac+a+bc}{1+bc+c}\ge\dfrac{ad(c+1+bc)}{cd+d+1}$, то согласно неравенству Коши имеем
$$\frac{ac+a+bc}{1+bc+c}+\frac{bd+b+cd}{1+cd+d}+\frac{ac+c+ad}{1+ad+a}+\frac{db+d+ab}{1+ab+b}\ge$$
$$\ge\frac{ad(c+1+bc)}{cd+d+1}+\frac{ba(d+1+cd)}{da+a+1}+\frac{cb(a+1+da)}{ab+b+1}+\frac{dc(b+1+ab)}{bc+c+1}\ge$$
$$\ge 4\sqrt[4]{\frac{ad(c+1+bc)}{cd+d+1}\cdot\frac{ba(d+1+cd)}{da+a+1}\cdot\frac{cb(a+1+da)}{ab+b+1}\cdot\frac{dc(b+1+ab)}{bc+c+1}}=4.$$
Что и требовалось доказать.

**Решение 2.** Поскольку $abcd=1$, то существуют положительные числа $x,y,z,t$ такие, что $a=\dfrac{x}{y}, b=\dfrac{y}{z}, c=\dfrac{z}{t}, d=\dfrac{t}{x}$ . Тогда наше неравенство может быть записано в следующем виде
$$\frac{(x-y)(z+t)}{y(y+z+t)}+\frac{(y-z)(x+t)}{z(z+x+t)}+\frac{(z-t)(x+y)}{t(z+x+y)}+\frac{(t-x)(y+z)}{x(x+y+z)}\ge 0$$
или, оно эквивалентно
$$\frac{x(z+t)+y^2}{y(z+t)+y^2}+\frac{y(x+t)+z^2}{z(x+t)+z^2}+\frac{z(x+y)+t^2}{t(x+y)+t^2}+\frac{t(y+z)+x^2}{x(y+z)+x^2}\ge 4\,.$$
Заметим, что согласно неравенству Коши-Буняковского имеем
$$(x(z+t)+y^2)\left(\frac{z+t}{x}+1\right)\ge(z+t+y)^2$$

или $\dfrac{x(z+t)+y^2}{y(z+t)+y^2} \geq \dfrac{x(z+t+y)}{y(z+t+x)}$ (равенство возможно только если $x=y$).

Теперь применяя неравенства подобные вышеуказанному для других переменных, мы получим

$$\frac{x(z+t)+y^2}{y(z+t)+y^2}+\frac{y(x+t)+z^2}{z(x+t)+z^2}+\frac{z(x+y)+t^2}{t(x+y)+t^2}+\frac{t(y+z)+x^2}{x(y+z)+x^2} \geq$$
$$\geq \frac{x(z+t+y)}{y(z+t+x)}+\frac{y(x+t+z)}{z(x+t+y)}+\frac{z(x+y+t)}{t(x+y+z)}+\frac{t(y+z+x)}{x(y+z+t)} \geq$$
$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{x(z+t+y)}{y(z+t+x)}\frac{y(x+t+z)}{z(x+t+y)}\frac{z(x+y+t)}{t(x+y+z)}\frac{t(y+z+x)}{x(y+z+t)}}=4$$

Отметим, что равенство возможно только в случае, когда $x=y=z=t$, т.е. $a=b=c=d=1$.