4. Первые k членов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ последовательности (a_n) – различные натуральные числа, а при $n > k$ член a_n – наименьшее натуральное число, не представимое в виде суммы нескольких (возможно, одного) предыдущих членов последовательности. Докажите, что $a_n = 2a_{n-1}$ при всех достаточно больших n.

Решение. Для каждого $n \geqslant k$ рассмотрим множество всех натуральных чисел, не превосходящих $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, и те из них, которые не являются суммами нескольких элементов множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, назовём *дырками*. Если множество дырок непусто, то a_{n+1} – наименьшая из них, в противном случае $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 1$. Докажем, что с увеличением n на 1 количество дырок уменьшается хотя бы на 1.

Заметим, что если число $t \leqslant S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ является суммой одного или нескольких из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то число $S - t$ тоже является такой суммой: это сумма всех a_i, не входящих в сумму, равную t.

То, что a_{n+1} – наименьшая дырка, означает, что все числа от 1 до $a_{n+1} - 1$ являются суммами нескольких из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Поэтому все числа от $a_1 + \ldots + a_n - a_{n+1}$ до $a_1 + \ldots + a_n$ тоже являются такими суммами. Добавляя a_{n+1}, получаем, что все числа от $a_1+\ldots+a_n$ до $a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}$ являются суммами каких-то из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Таким образом, при замене n на $n+1$ новых дырок не появилось, а хотя бы одна старая (собственно a_{n+1}) пропала, что и требовалось доказать.

Следовательно, начиная с какого-то момента дырок не останется.

Итак, при всех достаточно больших n выполнено равенство $a_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n + 1$. Тогда $a_{n+2} = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + 1 = (a_1 + \ldots + a_n + 1) + a_{n+1} = 2a_{n+1}$, что и требовалось доказать.

5. Для каждого натурального k обозначим через $C(k)$ сумму всех различных простых делителей числа k. Например, $C(1) = 0$, $C(2) = 2$, $C(45) = 8$. Найдите все натуральные n, для которых $C(2^n + 1) = C(n)$.

Ответ: $n = 3$.

Решение. Для каждого натурального $t > 1$ обозначим $P(t)$ наибольший простой делитель числа t.

Выделим из натурального n наибольший нечётный делитель: $n = 2^k m$. Тогда, $2^n+1 = 2^{2^k m}+1 = a^m + 1$, где $a = 2^{2^k}$. Если $k > 0$, то есть n чётно, то $C(n) = C(m) + 2$, а $C(2^n + 1) = C(a^m + 1)$.

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. При каждом простом $p > 2$ имеем $P\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right) = p$ или $P\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right) \geqslant 2p + 1$.

Доказательство. Пусть $P\left(\frac{a^p+1}{a+1}\right) = q$. По малой теореме Ферма q делит $2^{q-1}-1$, следовательно, и $(a^{2p} - 1, a^{q-1} - 1) = a^{(2p,q-1)} - 1$. Наибольший общий делитель $(2p, q-1)$ чётен и, следовательно, равен $2p$ или 2. В первом случае $q-1$ кратно $2p$, откуда $q \geqslant 2p+1$. Во втором случае a^2-1 кратно q, но $a-1$ не кратно q (так как a^p+1 кратно q), то есть $a \equiv -1 \pmod q$. Тогда $\frac{a^p+1}{a+1} = a^{p-1} - \ldots + 1 \equiv p \pmod q$. то есть $p = q$.

Лемма 2. Если p_1 и p_2 – различные нечётные простые числа, то $P\left(\frac{a^{p_1}+1}{a+1}\right)$ не равно $P\left(\frac{a^{p_2}+1}{a+1}\right)$.

Доказательство. Если $P\left(\frac{a^{p_1}+1}{a+1}\right) = P\left(\frac{a^{p_2}+1}{a+1}\right) = q$, то оба числа $a^{2p_1} - 1$ и $a^{2p_2} - 1$ кратны q, следовательно, на q делится $(a^{2p_1} - 1, a^{2p_2} - 1) = a^{(2p_1,2p_2)} - 1 = a^2 - 1$ и, значит, $a+1$, но тогда $p_1 = q$ и $p_2 = q$ – противоречие.

Перейдём теперь к решению задачи. Пусть n имеет нечётные простые делители $p_1, \ldots, p_s$. По лемме 2 имеем
$$C(2^n + 1) \geqslant P\left(\frac{a^{p_1}+1}{a+1}\right) + \ldots P\left(\frac{a^{p_s}+1}{a+1}\right)$$
Если $C(2^n + 1) > P\left(\frac{a^{p_1}+1}{a+1}\right) + \ldots P\left(\frac{a^{p_s}+1}{a+1}\right)$, то у $2^n + 1$ есть ещё хотя бы один простой делитель, кроме сложенных в правой части, то есть
$$C(2^n + 1) \geqslant P\left(\frac{a^{p_1}+1}{a+1}\right) + \ldots P\left(\frac{a^{p_s}+1}{a+1}\right) + 3 \geqslant p_1 + \ldots + p_s + 3 > C(n).$$
Поэтому достаточно разобрать случай равенства:
$$C(2^n + 1) = P\left(\frac{a^{p_1}+1}{a+1}\right) + \ldots P\left(\frac{a^{p_s}+1}{a+1}\right).$$
Если в этом случае существует i, для которого $P\left(\frac{a^{p_i}+1}{a+1}\right) \neq p_i$, то $C(2^n+1) \geqslant p_1+\ldots+p_s+p_i+1 > C(n)$.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда $P\left(\frac{a^{p_i}+1}{a+1}\right)=p_i$ при всех i. В ней имеем $C(n)=C(2^n+1)=p_1+\ldots+p_s$, поэтому n нечётно и $a=2$. Но $2^p\equiv 2\pmod p$ при всех нечётных p, поэтому при $p>3$ число 2^p+1 не кратно p. Таким образом, $s=1$, $p=3$, $n=3^r$ с некоторым натуральным r. Тогда число $2^n+1=2^{3^r}+1$ должно быть степенью тройки. Однако уже при $r=2$ и, следовательно, при всех $r\geqslant 2$ это число кратно 19. Таким образом, остаётся только случай $n=3$, очевидно, удовлетворяющий условию задачи.

6. В пространстве даны правильный тетраэдр $ABCD$ и произвольные точки M и N. Докажите неравенство
$$MA\cdot NA+MB\cdot NB+MC\cdot NC\geqslant MD\cdot ND.$$
(Тетраэдр называется *правильным*, если все шесть его рёбер равны.)

Решение. Нам потребуется

Лемма 1. Для любых различных точек A, B, C и D выполняется неравенство
$$AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD.$$

Доказательство. На луче DA выберем точку A_1 так, что $DA_1=\frac{1}{DA}$. Аналогично на лучах DB и DC выберем точки B_1 и C_1. Так как $\frac{DA_1}{DB}=\frac{DB_1}{DA}=\frac{1}{DA\cdot DB}$, из подобия треугольников DAB и DB_1A_1 имеем $A_1B_1=\frac{AB}{DA\cdot DB}$. Аналогично $B_1C_1=\frac{BC}{DB\cdot DC}$ и $C_1A_1=\frac{CA}{DC\cdot DA}$ (1). Подставляя эти равенства в неравенство треугольника $A_1B_1+B_1C_1\geqslant A_1C_1$, получаем $AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD$.

Лемма 2. На плоскости даны точки M, N и треугольник ABC. Тогда
$$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}\geqslant 1. \qquad (*)$$

Доказательство. В плоскости треугольника ABC рассмотрим точку K такую, что $\angle ABM=\angle KBC$, $\angle MAB=\angle CKB$. Заметим, что
$$\frac{CK}{BK}=\frac{AM}{AB},\frac{AK}{BK}=\frac{CM}{BC},\frac{BC}{BK}=\frac{BM}{AB}. \qquad (2)$$
Для точек A, N, C, K согласно лемме 1 имеем $AN\cdot CK+CN\cdot AK\geqslant AC\cdot NK$. По неравенству треугольника $NK\geqslant BK-BN$, следовательно $AN\cdot CK+CN\cdot AK\geqslant AC\cdot(BK-BN)$. Отсюда получаем, что
$$\frac{AN\cdot CK}{AC\cdot BK}+\frac{CN\cdot AK}{AC\cdot BK}+\frac{BN}{BK}\geqslant 1. \qquad (3)$$
Из (3) и (2) следует, что $\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}\geqslant 1$.

Следствие. Неравенство (*) остается верным, если точки M или N (одна или обе) не находятся в плоскости треугольника ABC.

Это следует из леммы 2, если вместо точек M и N рассмотреть проекции этих точек на плоскость треугольника ABC.

Приступим к решению задачи. На луче DA выберем точку A_1 так, что $DA_1=\frac{1}{DA}$. Аналогичным образом на лучах DB, DC, DM и DN выбираем точки B_1, C_1, M_1 и N_1.

По следствию из леммы 2 для точек M_1, N_1 и треугольника $A_1B_1C_1$ выполняется неравенство $A_1M_1\cdot A_1N_1+B_1M_1\cdot B_1N_1+C_1M_1\cdot C_1N_1\geqslant A_1B_1^2$; используя равенства, аналогичные (1), получаем
$$\frac{AM}{DA\cdot DM}\cdot\frac{AN}{DA\cdot DN}+\frac{BM}{DB\cdot DM}\cdot\frac{BN}{DB\cdot DN}+\frac{CM}{DC\cdot DM}\cdot\frac{CN}{DC\cdot DN}\geqslant\left(\frac{AB}{DA\cdot DB}\right)^2,$$
откуда
$$AM\cdot AN+BM\cdot BN+CM\cdot CN\geqslant DM\cdot DN,$$
что и требовалось доказать.