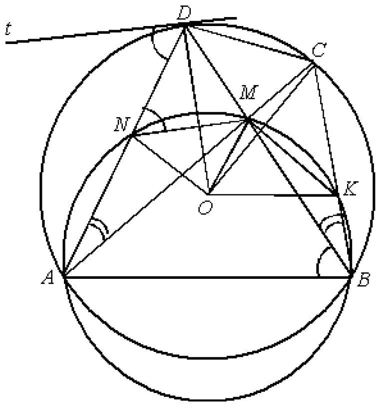
1. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает стороны AD и BC в точках N и K соответственно. Докажите, что четырёхугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

Решение. Пусть ω_1 – описанная окружность четырёхугольника $ABCD$, а ω_2– описанная окружность треугольника ABM. Углы $\angle CAD$ и $\angle DBC$ опираются на одну дугу ω_1 и поэтому равны. Отсюда следует, что хорды MN and MK, на которые эти углы опираются в ω_2, также равны. Отрезки OD и OC равны как радиусы ω_1. Пусть t – касательная к окружности ω_1 в точке D. Угол между t и AD равен $\angle ABD$ (потому что оба равны половине дуги AD) и, следовательно, равен $\angle MND$ (так как четырёхугольник $ABMN$ вписанный). Таким образом, отрезок MN параллелен t, значит, перпендикулярен OD. Аналогично отрезок MK перпендикулярен OC. Площади четырёхугольников $NOMD$ и $KOMC$ равны, так как соответственные диагонали этих четырёхугольников равны и в обоих четырёхугольниках диагонали перпендикулярны.



2. Числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} – перестановка чисел от 1 до 100. Пусть $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$. Какое наибольшее количество точных квадратов могло оказаться среди чисел S_1, S_2, $\ldots$, S_{100}?

Ответ: 60.

Решение. Добавим к последовательности S_1, S_2, $\ldots$, S_{100} начальный член $S_0 = 0$ и рассмотрим все члены $S_{n_0} < S_{n_1} < \ldots$, являющиеся квадратами: $S_{n_k} = m_k^2$ (в частности, $n_0 = m_0 = 0$). Так как $S_{100} = 5050 < 72^2$, все m_k не больше 71. Если $m_{k+1} = m_k + 1$, то $S_{n_{k+1}} - S_{n_k} = 2m_k + 1$ нечётно, поэтому среди чисел a_{n_k+1}, $\ldots$, $a_{n_{k+1}}$ есть нечётное. Так как нечётных чисел, не превосходящих 100, всего 50, то среди разностей $m_{k+1} - m_k$ не более 50 равных 1. Если в исходной последовательности найдётся 61 квадрат, то $m_{61} = (m_{61} - m_{60}) + (m_{60} - m_{59}) + \ldots + (m_1 - m_0) \geqslant 50 + 11 \cdot 2 = 72$, что невозможно.

Пример последовательности, в которой 60 квадратов, строится, например, так. Положим $a_i = 2i-1$ при $1 \leqslant i \leqslant 50$, тогда мы используем все нечётные числа, а $S_i = i^2$. Далее, возьмём $a_{51+4i} = 2+8i$, $a_{52+4i} = 100-4i$, $a_{53+4i} = 4+8i$, $a_{54+4i} = 98-4i$ при $0 \leqslant i \leqslant 7$, при этом будут использованы все чётные числа от 70 до 100 и все числа, дающие остатки 2 и 4 при делении на 8, от 2 до 60, а $S_{54+4i} - S_{50+4i} = 204 + 8i$, поэтому $S_{54+4i} = (52 + 2i)^2$. Наконец, последними 18 членами последовательности будут 30, 40, 64, 66, 68, 6, 8, 14, 16, 32, 38, 46, 54, 62, 22, 24, 48, 56. Это даёт $S_{87} = 66^2 + 2 \cdot 134 = 68^2$, $S_{96} = 70^2$.

3. В Графландии 60 городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно покрасить четыре города в красный цвет, а другие четыре – в зелёный так, чтобы каждая дорога, соединяющая красный город с зелёным, была направлена от красного к зелёному.

Решение. Скажем, что город A *обслуживает* четвёрку городов B_1, B_2, B_3, B_4, если из него ведут дороги во все эти четыре города. Если всего из города выходит k дорог, то он обслуживает C_k^4 четвёрок (мы считаем $C_k^4 = 0$ при $k < 4$). Пусть количества дорог, выходящих из всех городов – k_1, k_2, $\ldots$, k_{60}. Сумма этих количеств равна числу всех дорог $C_{60}^2 = 30 \cdot 59$. Сумма количеств четвёрок, обслуживаемых всеми городами, равна $S = C_{k_1}^4 + C_{k_2}^4 + \ldots + C_{k_{60}}^4$. Докажем, что наименьшее значение этой суммы при условии $k_1 + k_2 + \ldots + k_{60} = 30 \cdot 59$ равно $30 \cdot C_{30}^4 + 30 \cdot C_{29}^4$. Действительно, множество наборов целых неотрицательных k_i с суммой $30 \cdot 59$ конечно, поэтому один из них доставляет наименьшее значение этой суммы. Предположим, что в этом наборе есть два числа $m \geqslant 4$ и n, для которых $m - n \geqslant 2$. Тогда замена m и n на $m - 1$ и $n + 1$ уменьшит нашу сумму (так как $C_m^4 + C_n^4 - C_{m-1}^4 - C_{n+1}^4 = C_{m-1}^3 - C_n^3 > 0$). Таким образом, наименьшее значение суммы S достигается для набора k_i, никакие два из которых не отличаются более, чем на 1. Такой набор, очевидно, только один, и состоит из 30 чисел, равных 30 и 30 чисел, равных 29.

Итак, все 60 городов вместе обслуживают не менее $30 \cdot C_{30}^4 + 30 \cdot C_{29}^4$ четвёрок. Но это число, как легко проверить, больше, чем $3 \cdot C_{60}^4$, то есть утроенное количество всех четвёрок. Поэтому есть четвёрка, которую обслуживают хотя бы четыре города, что и требовалось доказать.