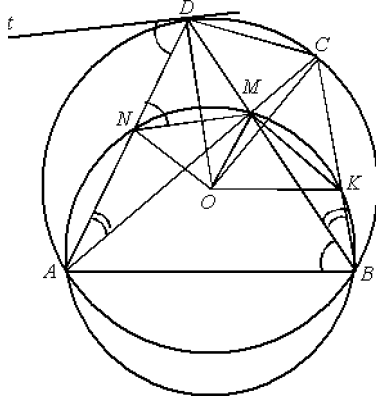


1. Диагонали четырёхугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность с центром  $O$ , пересекаются в точке  $M$ . Описанная окружность треугольника  $ABM$  пересекает стороны  $AD$  и  $BC$  в точках  $N$  и  $K$  соответственно. Докажите, что четырёхугольники  $NOMD$  и  $KOMC$  имеют равные площади.

**Решение.** Пусть  $\omega_1$  – описанная окружность четырёхугольника  $ABCD$ , а  $\omega_2$  – описанная окружность треугольника  $ABM$ . Углы  $\angle CAD$  и  $\angle DBC$  опираются на одну дугу  $\omega_1$  и поэтому равны. Отсюда следует, что хорды  $MN$  и  $MK$ , на которые эти углы опираются в  $\omega_2$ , также равны. Отрезки  $OD$  и  $OC$  равны как радиусы  $\omega_1$ . Пусть  $t$  – касательная к окружности  $\omega_1$  в точке  $D$ . Угол между  $t$  и  $AD$  равен  $\angle ABD$  (потому что оба равны половине дуги  $AD$ ) и, следовательно, равен  $\angle MND$  (так как четырёхугольник  $ABMN$  вписанный). Таким образом, отрезок  $MN$  параллелен  $t$ , значит, перпендикулярен  $OD$ . Аналогично отрезок  $MK$  перпендикулярен  $OC$ . Площади четырёхугольников  $NOMD$  и  $KOMC$  равны, так как соответственные диагонали этих четырёхугольников равны и в обоих четырёхугольниках диагонали перпендикулярны.



2. Числа  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  – перестановка чисел от 1 до 100. Пусть  $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ . Какое наибольшее количество точных квадратов могло оказаться среди чисел  $S_1, S_2, \dots, S_{100}$ ?

**Ответ:** 60.

**Решение.** Добавим к последовательности  $S_1, S_2, \dots, S_{100}$  начальный член  $S_0 = 0$  и рассмотрим все члены  $S_{n_0} < S_{n_1} < \dots$ , являющиеся квадратами:  $S_{n_k} = m_k^2$  (в частности,  $n_0 = m_0 = 0$ ). Так как  $S_{100} = 5050 < 72^2$ , все  $m_k$  не больше 71. Если  $m_{k+1} = m_k + 1$ , то  $S_{n_{k+1}} - S_{n_k} = 2m_k + 1$  нечётно, поэтому среди чисел  $a_{n_{k+1}}, \dots, a_{n_{k+1}}$  есть нечётное. Так как нечётных чисел, не превосходящих 100, всего 50, то среди разностей  $m_{k+1} - m_k$  не более 50 равных 1. Если в исходной последовательности найдётся 61 квадрат, то  $m_{61} = (m_{61} - m_{60}) + (m_{60} - m_{59}) + \dots + (m_1 - m_0) \geq 50 + 11 \cdot 2 = 72$ , что невозможно.

Пример последовательности, в которой 60 квадратов, строится, например, так. Положим  $a_i = 2i - 1$  при  $1 \leq i \leq 50$ , тогда мы используем все нечётные числа, а  $S_i = i^2$ . Далее, возьмём  $a_{51+4i} = 2 + 8i, a_{52+4i} = 10 - 4i, a_{53+4i} = 4 + 8i, a_{54+4i} = 98 - 4i$  при  $0 \leq i \leq 7$ , при этом будут использованы все чётные числа от 70 до 100 и все числа, дающие остатки 2 и 4 при делении на 8, от 2 до 60, а  $S_{54+4i} - S_{50+4i} = 204 + 8i$ , поэтому  $S_{54+4i} = (52 + 2i)^2$ . Наконец, последними 18 членами последовательности будут 30, 40, 64, 66, 68, 6, 8, 14, 16, 32, 38, 46, 54, 62, 22, 24, 48, 56. Это даёт  $S_{87} = 66^2 + 2 \cdot 134 = 68^2, S_{96} = 70^2$ .

3. В Графландии 60 городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно покрасить четыре города в красный цвет, а другие четыре – в зелёный так, чтобы каждая дорога, соединяющая красный город с зелёным, была направлена от красного к зелёному.

**Решение.** Скажем, что город  $A$  обслуживает четвёрку городов  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , если из него ведут дороги во все эти четыре города. Если всего из города выходит  $k$  дорог, то он обслуживает  $C_k^4$  четвёрок (мы считаем  $C_k^4 = 0$  при  $k < 4$ ). Пусть количества дорог, выходящих из всех городов –  $k_1, k_2, \dots, k_{60}$ . Сумма этих количеств равна числу всех дорог  $C_{60}^2 = 30 \cdot 59$ . Сумма количеств четвёрок, обслуживаемых всеми городами, равна  $S = C_{k_1}^4 + C_{k_2}^4 + \dots + C_{k_{60}}^4$ . Докажем, что наименьшее значение этой суммы при условии  $k_1 + k_2 + \dots + k_{60} = 30 \cdot 59$  равно  $30 \cdot C_{30}^4 + 30 \cdot C_{29}^4$ . Действительно, множество наборов целых неотрицательных  $k_i$  с суммой  $30 \cdot 59$  конечно, поэтому один из них доставляет наименьшее значение этой суммы. Предположим, что в этом наборе есть два числа  $m \geq 4$  и  $n$ , для которых  $m - n \geq 2$ . Тогда замена  $m$  и  $n$  на  $m - 1$  и  $n + 1$  уменьшит нашу сумму (так как  $C_m^4 + C_n^4 - C_{m-1}^4 - C_{n+1}^4 = C_{m-1}^3 - C_n^3 > 0$ ). Таким образом, наименьшее значение суммы  $S$  достигается для набора  $k_i$ , никакие два из которых не отличаются более, чем на 1. Такой набор, очевидно, только один, и состоит из 30 чисел, равных 30 и 30 чисел, равных 29.

Итак, все 60 городов вместе обслуживают не менее  $30 \cdot C_{30}^4 + 30 \cdot C_{29}^4$  четвёрок. Но это число, как легко проверить, больше, чем  $3 \cdot C_{60}^4$ , то есть утроенное количество всех четвёрок. Поэтому есть четвёрка, которую обслуживают хотя бы четыре города, что и требовалось доказать.