

*XII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2016*

15 января 2016 года, 9.00-13.30

Первый день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O , пересекаются в точке M . Описанная окружность треугольника ABM пересекает стороны AD и BC в точках N и K соответственно. В результате получаются четырёхугольники $NOMD$ и $KOMC$. Докажите, что они имеют равные площади.

2. Числа a_1, a_2, \dots, a_{100} – перестановка чисел от 1 до 100. Пусть $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$. Какое наибольшее количество точных квадратов могло оказаться среди чисел S_1, S_2, \dots, S_{100} ?

3. В Графландии 60 городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно покрасить четыре города в красный цвет, а другие четыре – в зелёный так, чтобы каждая дорога, соединяющая красный город с зелёным, была направлена от красного к зелёному.

*XII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2016*

January 15, 2016, 9:00-13:30

First day

(Each problem is worth 7 points)

1. A quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle with centre O . Its diagonals meet at M . The circumcircle of ABM intersects the sides AD and BC at N and K respectively. Quadrilaterals $NOMD$ and $KOMC$ are thus obtained. Prove that their areas are equal.

2. The numbers a_1, a_2, \dots, a_{100} are a permutation of the numbers $1, 2, \dots, 100$. Let $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$. What maximum number of perfect squares can be among the numbers S_1, S_2, \dots, S_{100} ?

3. There are 60 towns in Graphland; every two towns are connected with a one-way road. Prove that one can colour four towns red and another four towns green so that every road between a red town and a green town is directed from the red town to the green one.