

XIV Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2018

12 января 2018 года, 9.00-13.30

Первый день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Пусть α , β и γ – углы треугольника, противолежащие сторонам a , b и c соответственно. Докажите неравенство

$$2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \geq \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

2. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC соответственно взяты точки N , K и L так, что $AL = BK$ и CN – биссектриса угла C . Отрезки AK и BL пересекаются в точке P . Обозначим через I и J центры вписанных окружностей треугольников APL и BPK соответственно. Пусть Q – точка пересечения прямых CN и IJ . Докажите, что $IP = JQ$.

3. Докажите, что существует бесконечно много пар (m, n) натуральных чисел таких, что число $(m!)^n + (n!)^m + 1$ делится на $m + n$.