4. Крокодил загадал четыре клетки таблицы 2018×2018, образующие прямоугольник со сторонами 1 и 4. Медведь может выбрать в таблице любой квадрат, образованный 9 клетками, и спросить, есть ли в нём хотя бы одна из загаданных клеток. За какое наименьшее количество таких вопросов Медведь наверняка сможет получить утвердительный ответ?

Ответ: $\frac{673^2-1}{2} = 226464$.

Решение. Квадрат, о котором Медведь задаёт вопрос, и все его клетки будем называть *проверенными*. Положение клетки в таблице будем задавать номерами строки и столбца, в которых она стоит: клетка (x, y) стоит на пересечении x-й строки и y-го столбца.

Докажем, что за $\frac{673^2-1}{2}$ вопросов можно попасть в задуманный прямоугольник даже на доске 2019×2019. Разрежем эту доску на квадраты 3×3 и раскрасим эти квадраты в шахматном порядке так, чтобы угловые квадраты были белыми. Тогда достаточно проверить все чёрные квадраты 3×3: ни в какой строке и ни в каком столбце нет четырёх белых клеток подряд.

Чтобы доказать, что это количество вопросов необходимо, отметим все клетки вида $(3m+1, 3n+1)$, где $0 \leqslant m, n \leqslant 672$. Очевидно, никакие две отмеченных клетки не лежат в одном квадрате 3×3. С другой стороны, если две отмеченных клетки находятся в одном ряду на расстоянии 3 (то есть одна из них (x, y), а другая $(x, y+3)$ или $(x+3, y)$), то хотя бы одна из них должна быть проверена (потому что если они обе не проверены, то не проверены и две клетки между ними, и на непроверенных клетках можно разместить прямоугольник 1×4).

Поэтому достаточно указать $\frac{673^2-1}{2}$ пар отмеченных клеток на расстоянии 3. В качестве таких пар можно взять пары $(6k+1, 3n+1)$, $(6k+4, 3n+1)$, $0 \leqslant k \leqslant 335$, $0 \leqslant n \leqslant 672$, и пары $(2017, 6n+1)$, $(2017, 6n+4)$, $0 \leqslant n \leqslant 335$.

5. Найдите все вещественные a, при которых существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x - f(y)) = f(x) + a[y]$ для всех вещественных x и y ($[y]$ обозначает целую часть числа y).

Ответ: $a = -n^2$ для произвольного целого n.

Решение. Сразу заметим, что $a = 0$ удовлетворяет условию задачи (например, подходит функция $f(x) \equiv 0$).

Пусть теперь $a \neq 0$.

Лемма. $f(y) = f(z)$ тогда и только тогда, когда $[y] = [z]$.

Пусть $f(y) = f(z)$ для некоторых y, z. Тогда из данного уравнения получаем $f(x) + a[y] = f(x - f(y)) = f(x - f(z)) = f(x) + a[z]$, откуда $[y] = [z]$.

Обратно, если $[y] = [z]$, то $f(x - f(y)) = f(x) + a[y] = f(x) + a[z] = f(x - f(z))$. Из предыдущего наблюдения получаем $[x - f(y)] = [x - f(z)]$ для любого x. Положим $x = \frac{f(y)+f(z)}{2}$, тогда $\left[\frac{f(y)-f(z)}{2}\right] = \left[-\frac{f(y)-f(z)}{2}\right]$, следовательно, $f(y) = f(z)$. Лемма доказана.

Далее, утверждаем, что $f(m) \in \mathbb{Z}$ для всякого $m \in \mathbb{Z}$. Положим $y = m$ в данном уравнении, тогда получим $f(x - f(m)) = f(x) + am$ для любых $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Допустим, что $f(m) \notin \mathbb{Z}$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Выберем $t \in (0, 1)$ так, чтобы $[f(m)] = [f(m) + t]$. Тогда для $x = 0$ получаем $f(-f(m)) = f(0) + am$, а для $x = -t$ получаем $f(-t - f(m)) = f(-t) + am$. Учитывая лемму, имеем $f(-f(m)) = f(-t - f(m))$, так что $f(0) = f(-t) = f(-1)$, что противоречит лемме.

Далее везде в данном уравнении $f(x - f(y)) = f(x) + ay$ (1) мы будем использовать только целые x, y. Подставляя $y = 1$ в (1), получим $a \in \mathbb{Z}$. Далее, при $y = 0$ имеем $f(x - f(0)) = f(x)$, следовательно, $x - f(0) = x$ (по лемме), откуда $f(0) = 0$. Положим теперь $x = f(y)$, тогда $f(f(y)) = -ay$ (2); заменяя y на $f(y)$ в (1), получаем $f(x + ay) = f(x) + af(y)$ (3). Обозначим $f(1) = n$ и положим $y = 1$ в (3); получится $f(x + a) = f(x) + an$ (4). Положив $x = 0$ в (4), получим $f(a) = an$. Из (4) легко заключаем, что $f(ka) = kan$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, в частности, $f(an) = an^2$. Теперь подстановка $y = a$ в (2) даёт $-a^2 = f(f(a)) = an^2$, и $a = -n^2$, как и утверждалось.

Осталось заметить, что при $a = -n^2$ функция $f(x) = n[x]$ удовлетворяет данному условию: $n[x - n[y]] = n[x] - n^2[y]$, что очевидно.

6. В окружность с радиусом R вписан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Диагонали AD и BE, BE и CF, AD и CF шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точках M, N и K соответственно. Пусть r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM, BCN, CDK, DEM, EFN, AFK соответственно. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 \leqslant R\sqrt{3}$.

Решение.

Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть R – радиус описанной окружности четырёхугольника $XYZT$, диагонали которого пересекаются в точке U, и $\varphi = \frac{1}{2}\angle XUY$. Если r_1, r_2 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники XYU, ZTU соответственно, то

$$\frac{r_1 + r_2}{R} \leqslant 2\operatorname{tg}\varphi(1 - \sin\varphi). \qquad (1)$$

Действительно, пусть $\angle UXY = 2\psi$, $\angle UYX = 2\vartheta$, тогда имеем $\angle UTZ = \angle UXY = 2\psi$, $\angle UZT = \angle UYX = 2\vartheta$ (очевидно, $\psi + \vartheta + \varphi = \frac{\pi}{2}$). Тогда $XY + ZT = (r_1 + r_2)(\operatorname{ctg}\psi + \operatorname{ctg}\vartheta) = 2R\sin\angle XTY + 2R\sin(2\varphi - \angle XTY) = 2R(\sin\angle XTY + \sin(2\varphi - \angle XTY)) = 2R \cdot 2\sin\varphi\cos(\varphi - \angle XTY) \leqslant 4R\sin\varphi$. Следовательно,

$$\frac{r_1 + r_2}{R} \leqslant \frac{4\sin\varphi}{\operatorname{ctg}\psi + \operatorname{ctg}\vartheta} = \frac{4\sin\varphi\sin\psi\sin\vartheta}{\sin(\psi + \vartheta)} = \frac{4\sin\varphi\sin\psi\sin\vartheta}{\cos\varphi} = 4\operatorname{tg}\varphi\sin\psi\sin\vartheta =$$

$$= 4\operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{1}{2}(\cos(\psi - \vartheta) - \cos(\psi + \vartheta)) \leqslant 2\operatorname{tg}\varphi(1 - \sin\varphi),$$

что и требовалось доказать.

Пусть $\angle AMB = 2\alpha$, $\angle BNC = 2\beta$, $\angle CKD = 2\gamma$, тогда $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Применяя к четырёхугольникам $ABDE$, $BCEF$ и $CDFA$ неравенство (1), получаем

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6}{R} = \frac{r_1 + r_4}{R} + \frac{r_2 + r_5}{R} + \frac{r_3 + r_6}{R} \leqslant 2\,\mathrm{tg}\,\alpha(1 - \sin\alpha) + 2\,\mathrm{tg}\,\beta(1 - \sin\beta) + 2\,\mathrm{tg}\,\gamma(1 - \sin\gamma).$$

Докажем, что, если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то

$$2\,\mathrm{tg}\,\alpha(1 - \sin\alpha) + 2\,\mathrm{tg}\,\beta(1 - \sin\beta) + 2\,\mathrm{tg}\,\gamma(1 - \sin\gamma) \leqslant \sqrt{3}. \tag{2}$$

Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = 2\,\mathrm{tg}\,x(1 - \sin x)$ в области $(0; \frac{\pi}{2})$.

Поскольку $f''(x) = -2\frac{(1-\sin x)^2 + \cos^4 x}{\cos^3 x} < 0$ при $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, согласно неравенству Иенсена имеем

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \leqslant 3f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) = 3f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}.$$

Таким образом, неравенство (2) доказано, и $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 \leqslant \sqrt{3}R$.