Решения задач 1 тура МЖО 2018

1. Пусть α, β и γ — углы треугольника, противолежащие сторонам a, b и c соответственно. Докажите неравенство $2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)\geq\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}$.

Решение. По теореме синусов правая часть равна $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}+\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma}+\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$.

По неравенству Коши-Буняковского

$$\sin^2\alpha=\sin^2(\beta+\gamma)=(\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta)^2\leq(\sin^2\beta+\sin^2\gamma)(\cos^2\gamma+\cos^2\beta),$$

следовательно, $\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geq\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}$.

Прибавляя два аналогичных неравенства для $\cos^2\gamma+\cos^2\alpha$ и $\cos^2\alpha+\cos^2\beta$, получаем требуемое.

2. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC соответственно взяты точки N, K и L так, что $AL=BK$ и CN – биссектриса угла C. Отрезки AK и BL пересекаются в точке P. Обозначим через I и J центры вписанных окружностей треугольников APL и BPK соответственно. Пусть Q – точка пересечения прямых CN и IJ. Докажите, что $IP=JQ$.

Решение. Если $CA=CB$, то задача очевидна. Если $CA\neq CB$, то без потери общности можем предположить, что CN пересекает отрезок PK.

Пусть описанные окружности ω_1 и ω_2, соответственно треугольников APL и BPK, во второй раз пересеклись в точке T. Тогда

$$\angle LAT=\angle TPB=\angle TKB. \qquad (1)$$

и $\angle ALT=\angle APT=\angle TBK$, то есть $\triangle ALT=\triangle KBT$, откуда

$$AT=TK. \qquad (2)$$

Из (1) также следует, что четырехугольник $ACKT$ вписанный, а из (2), что $\angle ACT=\angle TCK$, то есть T лежит на биссектрисе CN.

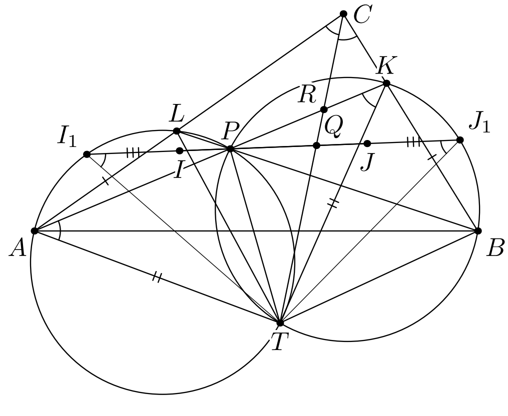

Рис. 1: картинка

Пусть IJ пересекает ω_1 и ω_2 в точках I_1 и J_1 соответственно. Так как радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны и $AL=BK$, равны и треугольники ALI_1 и BKJ_1. Воспользуемся леммой Мансиона: середина дуги XY окружности, описанной около треугольника XYZ, находится на равных расстояниях от концов этой дуги и центра вписанной окружности этого треугольника. По этой лемме $I_1I=I_1L=J_1K=J_1J$. Кроме того, $\angle PI_1T=\angle PAT=\angle PKT=\angle PJ_1T$, следовательно, $I_1T=J_1T$. Таким образом, T лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку I_1J_1, и на серединном перпендикуляре к отрезку IJ.

Осталось доказать, что T лежит на серединном перпендикуляре к отрезку PQ. Пусть $R=AK\cap CT$. Тогда $\angle ART=\angle RAC+\angle ACR=\angle RAC+\angle AKT=\angle RAC+\angle KAT=\angle LAT=\angle BPT$. Так как PQ делит угол RPB пополам, $\angle PQT=\angle PRT+\angle RPQ=\angle PBT+\angle BPJ=\angle TPQ$, следовательно, T лежит на серединном перпендикуляре отрезка PQ. Поэтому $IP=JQ$.

3. Докажите, что существует бесконечно много пар (m,n) натуральных чисел таких, что число $(m!)^n+(n!)^m+1$ делится на $m+n$.

Решение. Будем искать искомую пару так, чтобы число $m+n=p$ было простым и число n четным. Используя теорему Вильсона, получаем, что

$$m!=(p-n)!=\frac{(p-1)!}{(p-n+1)\dots(p-2)(p-1)}\equiv\frac{-1}{-(n-1)\dots(-2)(-1)}\equiv\frac{1}{(n-1)!}\equiv\frac{n}{n!}\pmod p.$$

По малой теореме Ферма $(n!)^p\equiv n!\pmod p$, следовательно,

$$(m!)^n+(n!)^m+1\equiv\left(\frac{n}{n!}\right)^n+(n!)^{p-n}+1\equiv\frac{n^n+n!+(n!)^n}{(n!)^n}\pmod p;$$

то есть достаточно доказать, что для бесконечного количества четных n число $n^n+n!+(n!)^n$ имеет простой делитель $p>n$.

Докажем, что этому условию удовлетворяют, например, все числа вида $n=2q$, где $q>2$ – простое число. Обозначим $A=(2q)^{2q}+(2q)!+((2q)!)^{2q}$. Для простого p и натурального k обозначим через $v_p(k)$ наибольшее целое число ℓ такое, что k делится на p^ℓ.

Если $r<2q$ – простое число и $r\notin\{2,q\}$, то $A\equiv(2q)^{2q}\not\equiv0\pmod r$. Простое число q входит в $(2q)!$ в степени 2, а в $(2q)^{2q}$ и $((2q)!)^{2q}$ – в степенях $2q$ и $4q$ соответственно, поэтому $v_q(A)=2$.

Далее, $v_2((2q)!)=\left[\frac{2q}{2}\right]+\left[\frac{2q}{4}\right]+\left[\frac{2q}{8}\right]+\dots<\frac{2q}{2}+\frac{2q}{4}+\frac{2q}{8}+\dots=2q$, следовательно, $v_2((2q)!)<v_2((2q)^{2q})$ и, конечно, $v_2((2q)!)<v_2((2q)!^{2q})$, поэтому $v_2(A)\leq 2q-1$. С другой стороны, $A>(2q)^{2q}>2^{2q-1}q^2$, поэтому у A есть простой делитель $p>2q$, что и требовалось доказать.