# *РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА*

## Внимание: баллы в оценках не делятся!

## Задача 1 (10.0 балла)

## Задача 1А (3.0 балла)

Пусть за время $\Delta t$ в ящик с песком попало $\Delta N$ пуль. Тогда переданный ящику импульс равен $\Delta p = \Delta Nmu$, что эквивалентно действия на него горизонтальной силы, равной

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta Nmu}{\Delta t} = nmu\,. \tag{1}$$

При отклонении на угол $\alpha$ горизонтальная сила $F$ совершает работу

$$A = Fl\sin\alpha\,. \tag{2}$$

Здесь $l$— расстояние от точки подвеса до центра масс.

Угол отклонения будет максимальным тогда, когда вся эта работа перейдет в потенциальную энергию мишени, равную

$$W = Mgl(1-\cos\alpha)\,. \tag{3}$$

Полагая по закону сохранения $A = W$, получаем ответ

$$\alpha_{\max} = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{F}{Mg}\right) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{nmu}{Mg}\right) = 0.2 \text{ рад} = 11.65°\,. \tag{4}$$

| Содержание | баллы |
|---|---|
| Формула (1) $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta Nmu}{\Delta t} = nmu$ | 0,5 |
| Формцла (2) $A = Fl\sin\alpha$ | 0,5 |
| Формула (3) $W = Mgl(1-\cos\alpha)$ | 0,5 |
| Формула (4) $\alpha_{\max} = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{F}{Mg}\right) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{nmu}{Mg}\right)$ | 1,0 |
| Численное значение $\alpha_{\max} = 0.2 \text{ рад} = 11.65°$ | 0,5 |
| **Итого** | **3,0** |

## Задача 1В (4.0 балла)

Расталкивание зарядов на поверхности приведёт к увеличению пузыря. По инерции он проскочит положение равновесия и возникнут колебания. Из-за внутреннего трения в газе колебания затухнут, пузырь придёт в новое равновесное состояние, при этом кинетическая энергия плёнки перейдёт во внутреннюю энергию газа, поэтому газ в этом процессе не подчиняется уравнению адиабаты.

Воспользуемся законом сохранения энергии для системы плёнка-газ:

$$\frac{5}{2}P_1V_1 + \sigma 8\pi R_1^2 + \frac{kq^2}{2R_1} = \frac{5}{2}P_2V_2 + \sigma 8\pi R_2^2 + \frac{kq^2}{2R_2} \tag{1}$$

Начальное давление газа в пузыре с учётом поверхностного натяжения равно

$$p_1 = \frac{4\sigma}{R_1}\,. \tag{2}$$

Конечное давление с учётом электростатических сил отталкивания равно (известная задача для сил, старающихся разорвать заряженную сферу)

$$p_2 = \frac{4\sigma}{R_2} - \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_2^4} \tag{3}$$

В нашем случае

$$V_1 = 4\pi R_1^3/3\,,\ V_2 = 4\pi R_2^3/3\,. \qquad (4)$$

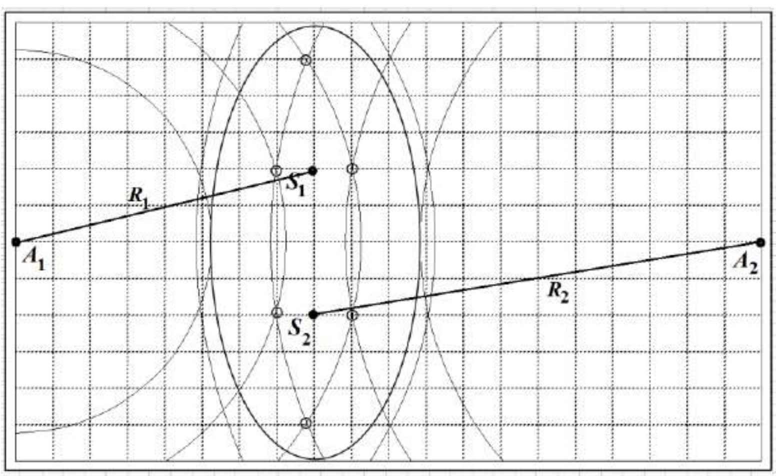
При этих условиях совместное решение уравнений (1)—(4) дает ответ

$$q = 32\pi\sqrt{\varepsilon_0 \sigma R_1^3}\,. \qquad (5)$$

| Содержание | баллы |
|---|---|
| $P_{нач} = P_{пов}$ | 0.5 |
| $P_{кон} = P_{пов} - P_э$ | 0.3 |
| $P_{пов} = 4\sigma/R$ | 0.3 |
| $P_э = q^2/32\pi^2\varepsilon_0 R^4$ | 0.5 |
| ЗСЭ вместо адиабаты | 0.5 |
| $W_{пов} = 8\pi R^2\sigma$ | 0.3 |
| $W_э = q^2/8\pi\varepsilon_0 R$ | 0.5 |
| $W_г = (5/2)\nu RT = (5/2)PV$ | 0.4 |
| Знает формулу объёма шара | 0.2 |
| Правильный ответ | 0.5 |
| **Итого** | **4.0** |

## Задача 1С (3.0 балла)

Сигнал может быть подавлен посредством интерференции волн. Волны от источников $S_1$ и $S_2$ приходят к приемникам в одной фазе, поэтому волна, приходящая к приемникам от третьего источника, должна быть в противофазе к волнам от источников $S_1$ и $S_2$. Для этого расстояние от третьего источника до точек приема должно отличаться на величину $\frac{\lambda}{2} + m\lambda$ (где $m = 0, \pm 1, \pm 2...$). Для нахождения точек, удовлетворяющих этим условиям, необходимо на выданном листе построить семейства окружностей радиусами $R_1 + \frac{\lambda}{2} + m\lambda$ с центром в точке $A_1$ и радиусами $R_2 + \frac{\lambda}{2} + m\lambda$ с центром точке $A_2$. Точки их пересечения и дадут искомые точки, где следует поместить третий источник, на рисунке они обозначены кружками. Амплитуда волны от третьего источника должна быть в 2 раза больше амплитуд волн, посылаемых источниками $S_1$ и $S_2$, следовательно, интенсивность волны должна быть в 4 раза больше, т.е. $4I_0$.



| Содержание | баллы |
|---|---|
| Сигналы гасятся благодаря интерференции волн; | 0,5 |
| Условие минимума (волны в противофазе); | 0,2 |
| Разность расстояний – полуцелое число длин волн | 0,3 |
| Построение двух семейств окружностей | 2×0,5 |
| Искомые точки – точки пересечения окружностей | 0,4 |
| Найдено 6 точек в выделенной области | 6×0,1 |
| **Итого** | **3,0** |

## Задача 2. Фантастические путешествия по Вселенной (10,0 балла)

### 1. Планеты диковинных форм (4,0 балла)

1.1 **[0,7 балла]**Наиболее легким подходом к решению этого пункта будет проведение аналогии между силой Кулона и законом гравитации Ньютона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \text{и } F = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}. \tag{1}$$

Далее, из теоремы Гаусса широко известен результат, что поле бесконечно большой заряженной плоскости, с поверхностной плотностью $\sigma$ равно

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{2}$$

По аналогии для плоской планеты результат будет схожим:

$$g_1 = \frac{\rho_1 h}{2\cdot(1/_{4\pi G})} = 2\pi G\rho_1 h, \tag{3}$$

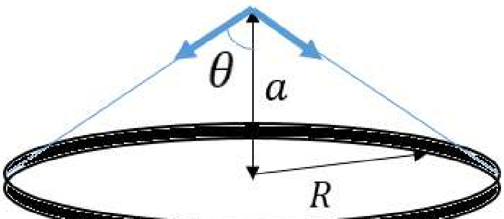
$$h = \frac{g_1}{2\pi G\rho_1} = 78{,}0 \text{ км}. \tag{4}$$

***

*Этот же результат нетрудно получить разбив бесконечную плоскость на тонкие кольца и проинтегрировав:*

*Сила притяжения от колечка с массой $M$, радиусом $R$ на расстоянии $a$ от его плоскости:*

$$F = G\frac{Mm}{R^2+a^2}cos\theta = G\frac{Mm}{a^2}cos^3\theta$$




*Разобьем плоскость высоты $h$ на тонкие колечки толщиной $dr$. Тогда сила притяжения со стороны колечка радиуса $r$ будет равна*

$$dF = G\frac{dMm}{a^2}cos^3\theta = G\frac{(\rho_1 h 2\pi r dr)m}{a^2}cos^3\theta$$

*Из тригонометрических соображений $r = a\cdot tan\theta$, $dr = \frac{a}{cos^2\theta}d\theta$*

*Подставляя в предыдущее выражение и интегрируя найдем суммарную силу $F$ действующую на тело массы $m$ со стороны бесконечной плоскости:*

$$F = 2\pi G\rho_1 hm\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta = 2\pi G\rho_1 hm$$

*Что идентично полученному ответу исходящему из аналогии с электростатическим полем.*

1.2**[0,5 балла]**Находясь вблизи бесконечной плоскости наблюдатель как-бы видит лишь нижнюю часть сферы, т.е видит лишь половину от максимального телесного угла:

$$\Omega_1 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi, \tag{5}$$

откуда из заданной в условии задачи формулы получаем

$$\alpha = \frac{g_1}{2\pi} \text{ или } \alpha = G\rho_1 h = 1{,}56\times10^{-2} \text{ м/с}^2 \tag{6}$$

1.3**[0,7балла]**Разобьем пирамиду на тонкие параллельные основанию слои толщиной $\Delta h$. Все эти слои будут видны из вершины пирамиды под одним и тем же телесным углом $\Omega_2$, таким что он равен одной шестой части от того если бы наблюдатель находился внутри куба:

$$\Omega_2 = \frac{1}{6}4\pi = \frac{2}{3}\pi. \quad (7)$$

Притяжение от одного тонкого слоя

$$dg_2 = \frac{dF}{m} = \alpha\Omega_2 = \frac{2}{3}\pi G\rho_2\Delta h, \quad (8)$$

или после суммирования по всем слоям пирамиды пирамиды будет

$$g_2 = \frac{1}{3}\pi G\rho_2 a = 3{,}14\text{м/с}^2. \quad (9)$$

1.4**[2,0 балла]**Пусть энергия взаимодействия корабля с пирамидальной планетой в момент взлета с вершины равна $U_1$, а его скорость в этот момент $v_1$. Из закона сохранения энергии для второй космической скорости получаем равенство:

$$\frac{mv_1^2}{2} - U_1 = 0. \quad (10)$$

Аналогично записывается закон сохранения энергии для старта с кубической планеты

$$\frac{mv_2^2}{2} - U_2 = 0, \quad (11)$$

где $U_2$ – потенциальная энергия корабля на вершине куба.

Покажем, что между $U_1$ и $U_2$ существует простое соотношение. Для этого рассмотрим положение корабля в центре кубической планеты. Содной стороны положение в центре кубической планеты эквивалентно нахождению на вершинах сразу шести склееных пирамид. Тогда потенциальная энергия корабля, находящегося в центре куба, с учетом изменения плотности вещества веществом планеты равна

$$U_c = 6U_1\frac{\rho_3}{\rho_2}. \quad (12)$$

Сдругой стороны нахождение в центре куба эквивалентно нахождению в вершинах сразу восьми кубов смежных кубов состоронами$\frac{a}{2}$. В общем случаепотенциальная энергия корабля в поле кубической планеты пропорциональна квадрату ее размера, так как

$$U = G\sum\frac{m\rho_3\Delta V_i}{r_i} \sim Gm\rho_3 a^2. \quad (13)$$

Таким образом для куба вдвое меньшего размера энергия взаимодействия будет в 4 раза меньше, а значитпотенциальная энергия корабля, находящегося в центре куба, равна

$$U_c = 8\frac{U_2}{4} = 2U_2. \quad (14)$$

Приравнивая выражения (12) и (14), находим

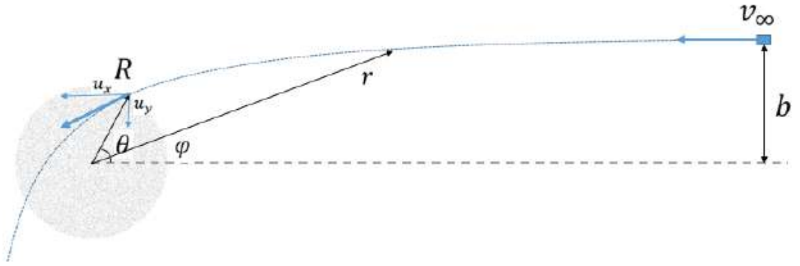
$$U_2 = 3U_1\frac{\rho_3}{\rho_2}. \quad (15)$$

Решая совместно уравнения (10), (11) и (15), окончательно получим

$$v_2 = \sqrt{\frac{3\rho_3}{\rho_2}}v_1 = 6{,}30\text{км/с}. \quad (16)$$

## 2. Пылевое облако (6,0 балла)

2.1 **[2,5 балла]**Для данной задачи используем смесь декартовой и полярных систем координат.




По закону сохранения энергии:

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mu_x^2}{2} + \frac{mu_y^2}{2} - G\frac{Mm}{R}, \quad (17)$$

где $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_4$ – полная масса облака.

Изменения импульса корабля в проекции на ось $x$декартовой системы координат имеет вид
$$mu_x - mv_\infty = \int G\frac{Mm}{r^2}cos\varphi dt = \int G\frac{Mm}{r^2\dot{\varphi}}cos\varphi d\varphi. \quad (18)$$
Из закона сохранения момента импульса для системы с центральносимметричными силами имеем:
$$r^2\dot{\varphi} = v_\infty b. \quad (19)$$
Таким образом
$$mu_x - mv_\infty = G\frac{Mm}{v_\infty b}\int_0^\theta cos\varphi d\varphi = G\frac{Mm}{v_\infty b}sin\theta. \quad (20)$$
Аналогично для проекции на ось$y$:
$$mu_y - m\cdot 0 = G\frac{Mm}{v_\infty b}\int_0^\theta sin\varphi d\varphi = G\frac{Mm}{v_\infty b}(1-cos\theta). \quad (21)$$
Для упрощения дальнейших преобразований введембезразмерную величину
$$z = \frac{GM}{v_\infty^2 b}, \quad (22)$$
тогда
$$u_x = (1+zsin\theta)v_\infty, \quad (23)$$
$$u_y = z(1-cos\theta)v_\infty. \quad (24)$$
Подставим уравнения (23) и (24) в (17), получаем
$$1 = (1+zsin\theta)^2 + z^2(1-cos\theta)^2 - 2z\frac{b}{R}. \quad (25)$$
Решая уравнения тоносительно $\theta$, находим
$$\theta = \arcsin\frac{\frac{b}{R}-\frac{GM}{v_\infty^2 b}}{\sqrt{1+\left(\frac{GM}{v_\infty^2 b}\right)^2}} + \arcsin\frac{\frac{GM}{v_\infty^2 b}}{\sqrt{1+\left(\frac{GM}{v_\infty^2 b}\right)^2}}, \quad (26)$$
или
$$\theta = 2\arctan\frac{1-\sqrt{1+2\frac{GM}{v_\infty^2 b}\frac{b}{R}-\frac{b^2}{R^2}}}{\frac{b}{R}-2\frac{GM}{v_\infty^2 b}} = 0{,}789\text{рад} = 45{,}2°. \quad (27)$$
*Стоит отметить что угол $\theta$, также как и суммарный угол отклонения траектории при движении через пылевое облако, может быть получен путем интегрирования уравнения, получающегося из комбинации законов сохранения энергии и момента импульса записанных в полярной системе координат. Выражения здесь не приводятся так как интегралы являются довольно громоздкими.*

2.2**[2,0 балла]**Для начала найдем как зависит потенциальная энергия взаимодействия корабля с облаком от расстояния $r < R$ до его центра. Известно, что слои сферического облака, лежащие на расстоянии большем $r$, не будут воздействовать на тело, поэтому суммарная действующая сила равна
$$F(r) = -G\frac{\rho_4\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2}m = -\frac{4}{3}\pi G\rho_4 mr, \quad (28)$$
а соответствующая ей потенциальная энергия
$$U(r) = -\int F(r)dr = \frac{2}{3}\pi G\rho_4 mr^2 + C = G\frac{Mm}{2R^3}r^2 + C. \quad (29)$$
Для нахождения константы интегрирования $C$воспользуемся тем, что потенциальная энергия должна быть непрерывной функцией в точке$r = R$, откуда
$$G\frac{Mm}{2R^3}R^2 + C = -G\frac{Mm}{R}, \quad (30)$$
или окончательно для $r < R$
$$U(r) = \frac{GMm}{2R^3}r^2 - \frac{3GMm}{2R}. \quad (31)$$
В момент когда расстояние до центра облака минимально радиальная состовляющая скорости равна нулю. Тогда из законов сохранения энергии и момента импульса
$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{GMm}{2R^3}r_{min}^2 - \frac{3GMm}{2R}, \quad (32)$$
$$v_0 r_{min} = v_\infty b, \quad (33)$$

получаем уравнение

$$1 = \frac{b^2}{r_{min}^2} + z\frac{r_{min}^2 b}{R^3} - 3z\frac{b}{R}, \tag{34}$$

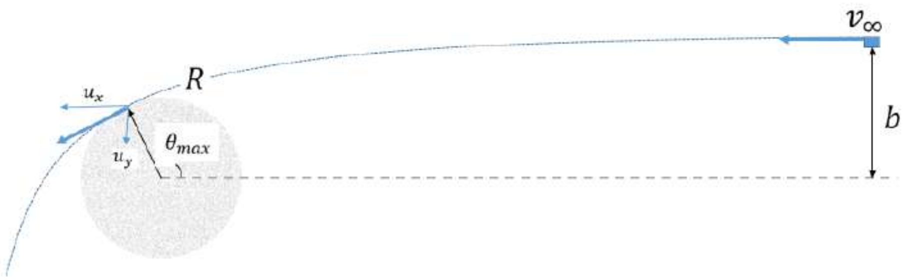
которое имеет решения

$$r_{min} = \sqrt{\frac{(\frac{3zb}{R}+1) \pm \sqrt{(\frac{3zb}{R}+1)^2 - \frac{4zb^3}{R^3}}}{2\frac{zb}{R^3}}}. \tag{35}$$

Смысл имеет только наименьший корень, так как при $b = 0$должно быть $r_{min} = 0$, откудаокончательно

$$r_{min} = R\sqrt{\frac{\left(\frac{3GM}{v_\infty^2 R}+1\right) - \sqrt{(\frac{3GM}{v_\infty^2 R}+1)^2 - \frac{4b^2 GM}{R^3\, v_\infty^2}}}{\frac{2GM}{v_\infty^2 R}}} = 4{,}97 \times 10^9\text{м}. \tag{36}$$

2.3**[1,0 балла]**Минимальная скорость $v_{\infty,min}$, позволяющая избежать столкновения, соответствует ситуации, когда корабль его лишь слегка «касается» облака.




В таком случае радиальная составляющая скорости равна нулю, а законы сохранения энергии и момента импульса записываются в виде:

$$\frac{mv_{\infty,min}^2}{2} = \frac{m0^2}{2} + \frac{mu_\tau^2}{2} - G\frac{Mm}{R}, \tag{37}$$

$$u_\tau R = v_\infty b, \tag{38}$$

откуда

$$v_{\infty,min} = \sqrt{\frac{2GM}{R\left(\frac{b^2}{R^2}-1\right)}} = 252\ \text{км/с}. \tag{39}$$

2.4**[0,6балла]**Предположим, что облако растаскивают на бесконечные расстояния так, что оно все время остается симметричным, а убираются тонкие слои толщиной $\Delta r$. Чтобы убрать один такой тонкий слой в момент когда облако имеет радиус $r$необходимо совершить работу

$$\Delta A = G\frac{(\rho_4\frac{4}{3}\pi r^3)(\rho_4 4\pi r^2 \Delta r)}{r} = \frac{16}{3}\pi^2 G\rho_4^2 r^4 \Delta r, \tag{40}$$

а чтобы растащить все облако необходимо совершить работу

$$A = \frac{16}{3}\pi^2 G\rho_4^2 \int_0^R r^4 \Delta r = \frac{16}{15}\pi^2 G\rho_4^2 R^5 = 1{,}33 \times 10^{45}\ \text{Дж}. \tag{41}$$

| № | Содержание | баллы | |
|---|---|---|---|
| **1.1** | Аналогия между силой Кулона и законом гравитации Ньютона формула (1): $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$ и $F = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$. | 0,2 | **0,7** |
| | Формула (2) $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ | 0,2 | |
| | Формула (4) $h = \frac{g_1}{2\pi G\rho_1}$ | 0,2 | |
| | Численное значение $h = 78{,}0$км | 0,1 | |
| **1.2** | Формула (5) $\Omega_1 = 2\pi$ | 0,2 | **0,5** |
| | Формула (6) $\alpha = \frac{g_1}{2\pi}$ или $\alpha = G\rho_1 h$ | 0,2 | |
| | Численное значение $\alpha = 1{,}56 \times 10^{-2}\text{м/с}^2$ | 0,1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.3** | Формула (7) $\Omega_2 = \frac{2}{3}\pi$ | 0,2 | **0,7** |
| | Формула (8) $dg_2 = \frac{dF}{m} = \alpha\Omega_2 = \frac{2}{3}\pi G\rho_2\Delta h$ | 0,2 | |
| | Формула (9) $g_2 = \frac{1}{3}\pi G\rho_2 a$ | 0,2 | |
| | Численное значение $g_2 = 3{,}14 м/с^2$ | 0,1 | |
| **1.4** | Формулы /(10) и (11) $\frac{mv_1^2}{2} - U_1 = 0\ \frac{mv_2^2}{2} - U_2 = 0$ | 0,2 | **2,0** |
| | Формула (12) $U_c = 6U_1\frac{\rho_3}{\rho_2}$ | 0,4 | |
| | Формула (13) $U = G\sum\frac{m\rho_3\Delta V_i}{r_i} \sim Gm\rho_3 a^2$ | 0,4 | |
| | Формула (14) $U_c = 8\frac{U_2}{4} = 2U_2$ | 0,2 | |
| | Формула (15) $U_2 = 3U_1\frac{\rho_3}{\rho_2}$ | 0,4 | |
| | Формула (16) $v_2 = \sqrt{\frac{3\rho_3}{\rho_2}}v_1$ | 0,3 | |
| | Численное значение $v_2 = 6{,}30 км/с$ | 0,1 | |
| **2.1** | Формула (17) $\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mu_x^2}{2} + \frac{mu_y^2}{2} - G\frac{Mm}{R}$ | 0,2 | **2,5** |
| | Формула (18) $mu_x - mv_\infty = \int G\frac{Mm}{r^2}cos\varphi dt = \int G\frac{Mm}{r^2\dot{\varphi}}cos\varphi d\varphi$ | 0,4 | |
| | Формула (19) $r^2\dot{\varphi} = v_\infty b$ | 0,2 | |
| | Формула (20) $mu_x - mv_\infty = G\frac{Mm}{v_\infty b}sin\theta$ | 0,4 | |
| | Формула (21) $mu_y = G\frac{Mm}{v_\infty b}(1 - cos\theta)$ | 0,4 | |
| | Формула (23) или аналогичные $u_x = (1 + zsin\theta)v_\infty$ | 0,3 | |
| | Формула (24) или аналогичные $u_y = z(1 - cos\theta)v_\infty$ | 0,3 | |
| | Формула (26) или формула (27) $\theta = \arcsin\frac{\frac{b}{R} - \frac{GM}{v_\infty^2 b}}{\sqrt{1+\left(\frac{GM}{v_\infty^2 b}\right)^2}} + \arcsin\frac{\frac{GM}{v_\infty^2 b}}{\sqrt{1+\left(\frac{GM}{v_\infty^2 b}\right)^2}}$ или $\theta = 2\arctan\frac{1 - \sqrt{1 + 2\frac{GM}{v_\infty^2 b}\frac{b}{R} - \frac{b^2}{R^2}}}{\frac{b}{R} - 2\frac{GM}{v_\infty^2 b}}$ | 0,2 | |
| | Численное значение $\theta = 0{,}789 рад = 45{,}2°$ | 0,1 | |
| **2.2** | Формула (28) $F(r) = -G\frac{\rho_4\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2}m = -\frac{4}{3}\pi G\rho_4 mr$ | 0,4 | **2,0** |
| | Формула (29) $U(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho_4 mr^2 + C = G\frac{Mm}{2R^3}r^2 + C$ | 0,3 | |
| | Формула (30) $G\frac{Mm}{2R^3}R^2 + C = -G\frac{Mm}{R}$ | 0,4 | |
| | Формула (32) $\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{GMm}{2R^3}r_{min}^2 - \frac{3GMm}{2R}$, | 0,2 | |
| | Формула (33) $v_0 r_{min} = v_\infty b$ | 0,2 | |
| | Формула (35) $r_{min} = \sqrt{\frac{(\frac{3zb}{R}+1)\pm\sqrt{(\frac{3zb}{R}+1)^2 - \frac{4zb^3}{R^3}}}{2\frac{zb}{R^3}}}$ | 0,2 | |
| | Выбран меньший корень, формула (36) | 0,2 | |
| | Численное значение $r_{min} = 4{,}97 \times 10^9 м$ | 0,1 | |
| **2.3** | Формула (37) $\frac{mv_{\infty,min}^2}{2} = \frac{m0^2}{2} + \frac{mu_\tau^2}{2} - G\frac{Mm}{R}$ | 0,4 | **1,0** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Формула (38) $u_\tau R = v_\infty b$ | 0,3 | |
| | Формула (39) $v_{\infty,min} = \sqrt{\frac{2GM}{R\left(\frac{b^2}{R^2}-1\right)}}$ | 0,2 | |
| | Численное значение $v_{\infty,min} = 252$км/с | 0,1 | |
| **2.4** | Формула (40) $\Delta A = \frac{16}{3}\pi^2 G\rho_4^2 r^4 \Delta r$ | 0,3 | **0,6** |
| | Формула (41) $A = \frac{16}{15}\pi^2 G\rho_4^2 R^5$ | 0,2 | |
| | Численное значение $A = 1{,}33 \times 10^{45}$Дж | 0,1 | |
| **Итого** | | | **10,0** |

## Задача 3. Сопротивление призмы (10,0 балла)

### 1. Математическое введение (3,0 балла)

1.1 **[0,2 балла]**Из школьного курса математики известно, что члены геометрической прогрессии выражаются в явном виде так

$$x_k = A\lambda^k. \tag{1}$$

1.2 **[0,4 балла]**Выразим $\lambda^k$ рекуррентно через $\lambda^{k-1}$:

$$\lambda^k = \lambda^{k-1} \cdot \lambda$$

и преобразуем его с помощью приведенной формы

$$\begin{aligned}\lambda^k &= \left(p_k + q_k\sqrt{3}\right) = \left(p_{k-1} + q_{k-1}\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right) = 2p_{k-1} + p_{k-1}\sqrt{3} + 2q_{k-1}\sqrt{3} + 3q_{k-1} = \\ &= \left(2p_{k-1} + 3q_{k-1}\right) + \left(p_{k-1} + 2q_{k-1}\right)\sqrt{3}.\end{aligned} \tag{2}$$

Из этого равенства следуют требуемые рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} p_k &= 2p_{k-1} + 3q_{k-1} \\ q_k &= p_{k-1} + 2q_{k-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обратные соотношения получаются аналогично:

$$\begin{aligned}\lambda^{k-1} &= p_{k-1} + q_{k-1} = \lambda^k \cdot \lambda^{-1} = \left(p_k + q_k\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) = \\ &= \left(2p_k - 3q_k\right) + \left(2q_k - p_k\right)\sqrt{3},\end{aligned} \tag{4}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} p_{k-1} &= 2p_k - 3q_k \\ q_{k-1} &= 2q_k - p_k. \end{aligned} \tag{5}$$

1.3 **[0,7 балла]**Расчет коэффициентов легко провести последовательно, учитывая, что $p_0 = 1, \quad q_0 = 0$. Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1.

| $k$ | $p_k$ | $q_k$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 7 | 4 |
| 3 | 26 | 15 |
| 4 | 97 | 56 |
| 5 | 362 | 209 |

1.4 **[0,2 балла]**Можно заметить, что

$$\lambda^{-1} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}, \tag{6}$$

поэтому

$$\lambda^{-k} = \left(2-\sqrt{3}\right)^k = p_k - q_k\sqrt{3}\,. \qquad (7)$$

1.5 **[1,0 балла]**Используя подсказку, подставим величины $x_k = C\lambda^k$ в рекуррентное соотношение и получим уравнение для определения $\lambda$ в виде

$$\lambda^{k+1} = 4\lambda^k - \lambda^{k-1}. \qquad (8)$$

После сокращения получим квадратное уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0\,, \qquad (9)$$

решением которого являются

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}\,. \qquad (10)$$

Следовательно, в общем виде члены последовательности, заданной рекуррентным соотношением (3) в условии задачи, в явном виде могут быть описаны формулой

$$x_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k\,, \qquad (11)$$

где $C_1, C_2$ – произвольные постоянные, которые могут быть найдены из граничных условий:

$$\begin{aligned} x_0 = A \quad &\Rightarrow \quad C_1 + C_2 = A \\ x_0 = B \quad &\Rightarrow \quad C_1\lambda_1^N + C_2\lambda_2^N = B. \end{aligned} \qquad (12)$$

Решая полученную систему линейных уравнений, получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = A \\ C_1\lambda_1^N + C_2\lambda_2^N = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{B - A\lambda_2^N}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} \\ C_2 = \dfrac{A\lambda_1^N - B}{\lambda_1^N - \lambda_2^N}. \end{cases} \qquad (13)$$

Подставив это решение в выражение (11), преобразуем его к симметричному виду

$$\begin{aligned} x_k &= C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k = \frac{B - A\lambda_2^N}{\lambda_1^N - \lambda_2^N}\lambda_1^k + \frac{A\lambda_1^N - B}{\lambda_1^N - \lambda_2^N}\lambda_2^k = \\ &= \frac{A\lambda_1^N\lambda_2^k - B\lambda_2^k + B\lambda_1^k - A\lambda_2^N\lambda_1^k}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} = \frac{A\left(\lambda_1^{N-k} - \lambda_2^{N-k}\right) + B\left(\lambda_1^k - \lambda_2^k\right)}{\lambda_1^N - \lambda_2^N}. \end{aligned} \qquad (14)$$

При выводе последнего соотношения учтено, что по теореме Виета $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$.

1.6 **[0,5 балла]**С учетом полученных формул для $\lambda_{1,2}^k$, найдем, что

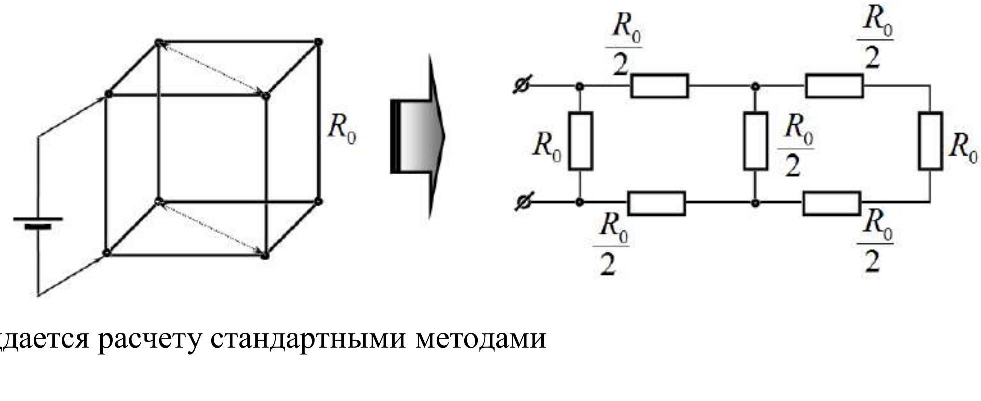
$$\lambda_1^k - \lambda_2^k = \lambda_1^k - \lambda_1^{-k} = \left(p_k + q_k\sqrt{3}\right) - \left(p_k - q_k\sqrt{3}\right) = 2q_k\sqrt{3}\,, \qquad (15)$$

откуда окончательно получим

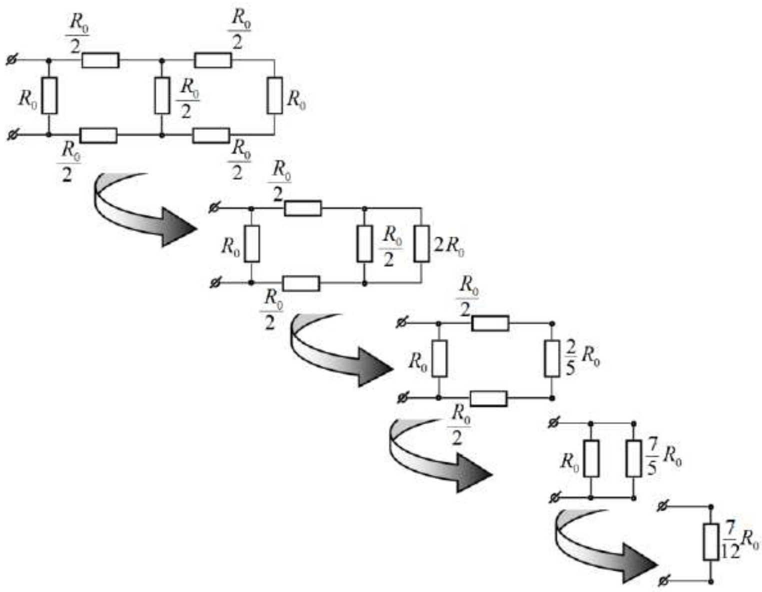
$$x_k = \frac{A\left(\lambda_1^{N-k} - \lambda_2^{N-k}\right) + B\left(\lambda_1^k - \lambda_2^k\right)}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} = \frac{Aq_{N-k} + Bq_k}{q_N}\,. \qquad (16)$$

## 2. Проволочный каркас в форме призмы (7,0 балла)

2.1 **[0,8 балла]**Если соединить вершины куба, имеющие одинаковый потенциал, то получим следующую эквивалентную схему




которая поддается расчету стандартными методами



Итого: сопротивление куба при заданном подключении равно

$$R = \frac{7}{12} R_0 . \tag{17}$$

2.2 **[0,2 балла]**Явная симметрия схемы и начальных условий дает очевидные соотношения

$$y_k = -x_k , \tag{18}$$

$$x_{N-k} = x_k . \tag{19}$$

2.3 **[1,0 балла]**Алгебраическая сумма сил токов, входящих в узел равна нулю, поэтому для узла $x_k$ можно записать, с учетом закона Ома, следующее уравнение

$$\frac{x_{k-1} - x_k}{R_0} + \frac{x_{k+1} - x_k}{R_0} + \frac{y_k - x_k}{R_0} = 0 . \tag{20}$$

Так как $y_k = -x_k$, то из полученного уравнения следует

$$x_{k+1} - 4x_k + x_{k-1} = 0 . \tag{21}$$

2.4 **[0,2 балла]**Для однозначного определения всех величин $x_k$ в явном виде необходимозадать два граничных условия. В качестве таких могут быть выбранызаданное значение начального потенциала

$$x_0 = \varphi_0 , \tag{22}$$

а в качестве второго – условие симметрии (19), которое справедливо при любом $k$, в частности при $k = 0$ (несмотря на то, что узлас номером $N$ в схеме нет!)

$$x_N = x_0 . \tag{23}$$

2.5 **[0,2 балла]**Рекуррентное соотношение (21) рассмотрено в Математическом введении. Поэтому можно воспользоваться полученным решением (16), если положить $A = B = \varphi_0$:

$$x_k = \frac{Aq_{N-k} + Bq_k}{q_N} = \varphi_0 \frac{q_{N-k} + q_k}{q_N} . \tag{24}$$

2.6 **[0,4 балла]**Сила тока в цепи источника равна сумме токов, вытекающих из узла $x_0$:

$$I = \frac{x_0 - x_1}{R_0} + \frac{x_0 - x_{N-1}}{R_0} + \frac{x_0 - y_0}{R_0} = \frac{4x_0 - 2x_1}{R_0} . \tag{25}$$

Здесь принято во внимание, что $y_0 = -x_0$, $x_{N-1} = x_1$. Подставляя найденные значения $x_0, x_1$, получим

$$I_0 = \frac{4x_0 - 2x_1}{R_0} = \frac{2}{R_0}\left(2\phi_0 - \phi_0 \frac{q_{N-1} + q_1}{q_N}\right) = \frac{2\phi_0}{R_0}\left(2 - \frac{q_{N-1}+1}{q_N}\right) =$$
$$= \frac{2\phi_0}{R_0}\frac{2q_N - q_{N-1} - 1}{q_N} = \frac{2\phi_0}{R_0}\frac{2q_N - (2q_N - p_N) - 1}{q_N} = \frac{2\phi_0}{R_0}\frac{p_N - 1}{q_N}. \quad (26)$$

На последнем шаге использовано соотношение (5) $q_{N-1} = 2q_N - p_N$ .

2.7 **[0,2 балла]**На входе рассмативаемой сети напряжение равно

$$U_0 = 2\varphi_0 , \quad (27)$$

следовательно, ее сопротивление можно рассчитать по изящной формуле

$$R_N = \frac{U_0}{I_0} = R_0 \frac{q_N}{p_N - 1}. \quad (28)$$

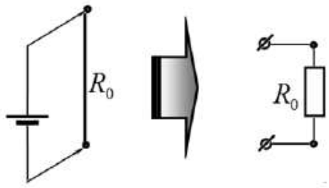
2.8 **[1,0 балла]**Расчеты легко провести с помощью чисел Таблицы 1.

Таблица 2. Сопротивления призм.

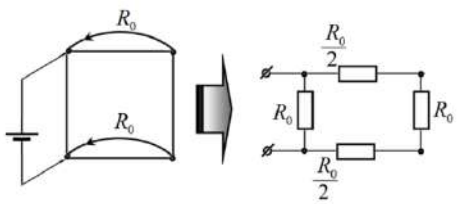
| $N$ | $p_N$ | $q_N$ | $R_N$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | $R_0$ |
| 2 | 7 | 4 | $R_0 \frac{4}{7-1} = \frac{2}{3} R_0$ |
| 3 | 26 | 15 | $R_0 \frac{15}{26-1} = \frac{3}{4} R_0$ |
| 4 | 97 | 56 | $R_0 \frac{56}{97-1} = \frac{7}{12} R_0$ |
| 5 | 362 | 209 | $R_0 \frac{209}{362-1} = \frac{11}{19} R_0$ |

Значение сопротивления кубического каркаса для $N = 4$ совпадает с найденным ранее.

2.9 **[0,5 балла]**Для $N = 1$ схема очевидна:




При $N = 2$ следует не забыть «замкнуть» призму:




В обоих случаях сопротивления этих призм соответстсвуют значениям, приведенным в Таблице 2.

2.10 **[1,0 балла]**Предел формулы (28) можно найти различными способами, например, выразив

$$p_N = \frac{1}{2}\left(\lambda^N - \lambda^{-N}\right), \quad q_N = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\lambda^N + \lambda^{-N}\right), \quad (29)$$

где $\lambda = 2 + \sqrt{3} > 1$.

Тогда

$$R_\infty = \lim_{N\to\infty} R_N = R_0 \lim_{N\to\infty} \frac{q_N}{p_N - 1} = R_0 \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\lambda^N + \lambda^{-N}\right)}{\frac{1}{2}\left(\lambda^N - \lambda^{-N}\right) - 1} = \frac{R_0}{\sqrt{3}}. \qquad (30)$$

2.11 **[1,5 балла]**Рассчитаем

$$\frac{R_\infty}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577\,. \qquad (31)$$

Затем проведем расчет относительной погрешности этого приближенного выражения для различных возрастающих $N$ с помощью данных Таблицы 2.

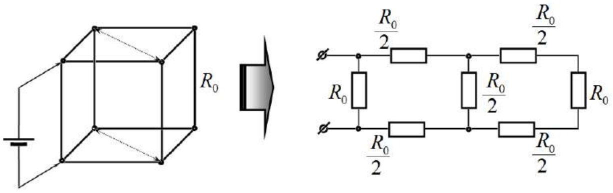
Таблица 3.

| $N$ | $R_N$ | $\frac{R_N}{R_0}$ | $\varepsilon = \frac{R_\infty - R_N}{R_N}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $R_0$ | 1,000 | -0,423 |
| 2 | $\frac{2}{3}R_0$ | 0,667 | -0,134 |
| 3 | $\frac{3}{4}R_0$ | 0,750 | -0,038 |
| 4 | $\frac{7}{12}R_0$ | 0,583 | -0,010 |
| 5 | $\frac{11}{19}R_0$ | 0,579 | <-0,004 |

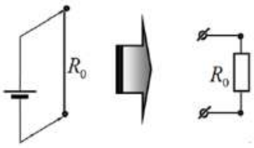
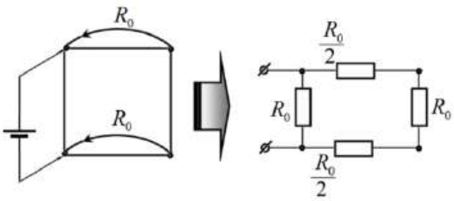
Видим, что уже при $N = 4$ погрешность равна 1%. Следовательно, в данной задаче бесконечность равна четырем!

$$\infty \approx 4\,. \qquad (32)$$

<table>
<tr><th>№</th><th>Содержание</th><th>баллы</th><th></th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Формула (1) $x_k = A\lambda^k$</td><td>0,2</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.2</td><td>Формулы (3) $p_k = 2p_{k-1} + 3q_{k-1}$<br>$q_k = p_{k-1} + 2q_{k-1}$</td><td>0,2</td><td rowspan="2">0,4</td></tr>
<tr><td>Формулы (5) $p_{k-1} = 2p_k - 3q_k$<br>$q_{k-1} = 2q_k - p_k$</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.3</td><td>Начальные значения $p_0 = 1, \quad q_0 = 0$</td><td>0,2</td><td rowspan="2">0,7</td></tr>
<tr><td>Правильные значения в таблице 1.<br>Таблица 1.<br><table><tr><th>$k$</th><th>$p_k$</th><th>$q_k$</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>7</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>26</td><td>15</td></tr><tr><td>4</td><td>97</td><td>56</td></tr><tr><td>5</td><td>362</td><td>209</td></tr></table></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Формула (7) $\lambda^{-k} = p_k - q_k\sqrt{3}$</td><td>0,2</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>Формула (10) $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$</td><td>0,2</td><td>1,0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td>Формула (11) $x_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k$</td><td>0,2</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>Система (12) $\begin{matrix} C_1 + C_2 = A \\ C_1\lambda_1^N + C_2\lambda_2^N = B \end{matrix}$</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>Решение (13) $\begin{cases} C_1 = \dfrac{B - A\lambda_2^N}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} \\ C_2 = \dfrac{A\lambda_1^N - B}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} \end{cases}$</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>Формула (14) $x_k = \dfrac{A\left(\lambda_1^{N-k} - \lambda_2^{N-k}\right) + B\left(\lambda_1^k - \lambda_2^k\right)}{\lambda_1^N - \lambda_2^N}$</td><td>0,,2</td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>Формула (16) $x_k = \dfrac{Aq_{N-k} + Bq_k}{q_N}$</td><td>0,5</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.1</td><td>

Эквивалентная схема</td><td>0,3</td><td rowspan="2">0,8</td></tr>
<tr><td>Формула (17) $R = \dfrac{7}{12}R_0$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.2</td><td>Формула (18) $y_k = -x_k$</td><td>0,1</td><td rowspan="2">0,2</td></tr>
<tr><td>Формула (19) $x_{N-k} = x_k$</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.3</td><td>Формула (20) $\dfrac{x_{k-1} - x_k}{R_0} + \dfrac{x_{k+1} - x_k}{R_0} + \dfrac{y_k - x_k}{R_0} = 0$</td><td>0,5</td><td rowspan="2">1,0</td></tr>
<tr><td>Формула (21) $x_{k+1} - 4x_k + x_{k-1} = 0$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.4</td><td>Формула (22) $x_0 = \varphi_0$</td><td>0,1</td><td rowspan="2">0,2</td></tr>
<tr><td>Формула (23) $x_N = x_0$</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>Формула (24) $x_k = \dfrac{Aq_{N-k} + Bq_k}{q_N} = \varphi_0 \dfrac{q_{N-k} + q_k}{q_N}$</td><td>0,2</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.6</td><td>Формула (25) $I = \dfrac{4x_0 - 2x_1}{R_0}$</td><td>0,2</td><td rowspan="2">0,4</td></tr>
<tr><td>Формула (26) $I_0 = \dfrac{2\varphi_0}{R_0}\dfrac{p_N - 1}{q_N}$</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.7</td><td>Формула (27) $U_0 = 2\varphi_0$</td><td>0,1</td><td rowspan="2">0,2</td></tr>
<tr><td>Формула (28) $R_N = \dfrac{U_0}{I_0} = R_0 \dfrac{q_N}{p_N - 1}$</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>2.8</td><td>Правильные значения в таблице 2.<br>Таблица 2. Сопротивления призм.
<table>
<tr><td>$N$</td><td>$p_N$</td><td>$q_N$</td><td>$R_N$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>$R_0$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7</td><td>4</td><td>$R_0\dfrac{4}{7-1} = \dfrac{2}{3}R_0$</td></tr>
</table></td><td>1,0</td><td>1,0</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>3</td><td>26</td><td>15</td><td>$R_0\dfrac{15}{26-1}=\dfrac{3}{4}R_0$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>97</td><td>56</td><td>$R_0\dfrac{56}{97-1}=\dfrac{7}{12}R_0$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>362</td><td>209</td><td>$R_0\dfrac{209}{362-1}=\dfrac{11}{19}R_0$</td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.9</td><td>Эквивалентная схема для $N=1$<br>
</td><td>0,1</td><td rowspan="2">0,5</td></tr>
<tr><td>Эквивалентная схема для $N=2$<br>
</td><td>0,4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.10</td><td>Формула (29) $p_N=\dfrac{1}{2}\left(\lambda^N-\lambda^{-N}\right),\quad q_N=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\lambda^N+\lambda^{-N}\right)$</td><td>0,5</td><td rowspan="2">1,0</td></tr>
<tr><td>Формула (30) $R_\infty=\dfrac{R_0}{\sqrt{3}}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2.11</td><td>Формула (31) $\dfrac{R_\infty}{R_0}\approx 0,577$</td><td>0,2</td><td rowspan="3">1,5</td></tr>
<tr><td>Правильные значения в таблице 3.<br>Таблица 3.
<table>
<tr><td>$N$</td><td>$R_N$</td><td>$\dfrac{R_N}{R_0}$</td><td>$\varepsilon=\dfrac{R_\infty-R_N}{R_N}$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$R_0$</td><td>1,000</td><td>-0,423</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\dfrac{2}{3}R_0$</td><td>0,667</td><td>-0,134</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\dfrac{3}{4}R_0$</td><td>0,750</td><td>-0,038</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\dfrac{7}{12}R_0$</td><td>0,583</td><td>-0,010</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\dfrac{11}{19}R_0$</td><td>0,579</td><td><-0,004</td></tr>
</table>
</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>Формула (32) $\infty\approx 4$</td><td>0,3</td></tr>
<tr><td>Итого</td><td></td><td></td><td>10,0</td></tr>
</table>