

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА****Внимание: баллы в оценках не делятся!****Задача 1 (10.0 балла)****Задача 1А (3.0 балла)**

Пусть за время  $\Delta t$  в ящик с песком попало  $\Delta N$  пуль. Тогда переданный ящику импульс равен  $\Delta p = \Delta N m u$ , что эквивалентно действия на него горизонтальной силы, равной

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta N m u}{\Delta t} = n m u. \quad (1)$$

При отклонении на угол  $\alpha$  горизонтальная сила  $F$  совершает работу

$$A = F l \sin \alpha. \quad (2)$$

Здесь  $l$  — расстояние от точки подвеса до центра масс.

Угол отклонения будет максимальным тогда, когда вся эта работа перейдет в потенциальную энергию мишени, равную

$$W = M g l (1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

Полагая по закону сохранения  $A = W$ , получаем ответ

$$\alpha_{\max} = 2 \arctg \left( \frac{F}{M g} \right) = 2 \arctg \left( \frac{n m u}{M g} \right) = 0.2 \text{ рад} = 11.65^\circ. \quad (4)$$

| Содержание  | баллы      |
|---|------------|
| Формула (1) $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta N m u}{\Delta t} = n m u$                             | 0,5        |
| Формула (2) $A = F l \sin \alpha$   | 0,5        |
| Формула (3) $W = M g l (1 - \cos \alpha)$   | 0,5        |
| Формула (4) $\alpha_{\max} = 2 \arctg \left( \frac{F}{M g} \right) = 2 \arctg \left( \frac{n m u}{M g} \right)$ | 1,0        |
| Численное значение $\alpha_{\max} = 0.2 \text{ рад} = 11.65^\circ$  | 0,5        |
| <b>Итого</b>  | <b>3,0</b> |

**Задача 1В (4.0 балла)**

Расталкивание зарядов на поверхности приведёт к увеличению пузыря. По инерции он проскочит положение равновесия и возникнут колебания. Из-за внутреннего трения в газе колебания затухнут, пузырь придёт в новое равновесное состояние, при этом кинетическая энергия плёнки перейдёт во внутреннюю энергию газа, поэтому газ в этом процессе не подчиняется уравнению адиабаты.

Воспользуемся законом сохранения энергии для системы плёнка-газ:

$$\frac{5}{2} P_1 V_1 + \sigma 8 \pi R_1^2 + \frac{k q^2}{2 R_1} = \frac{5}{2} P_2 V_2 + \sigma 8 \pi R_2^2 + \frac{k q^2}{2 R_2} \quad (1)$$

Начальное давление газа в пузыре с учётом поверхностного натяжения равно

$$p_1 = \frac{4 \sigma}{R_1}. \quad (2)$$

Конечное давление с учётом электростатических сил отталкивания равно (известная задача для сил, старающихся разорвать заряженную сферу)

$$p_2 = \frac{4 \sigma}{R_2} - \frac{q^2}{32 \pi^2 \varepsilon_0 R_2^4} \quad (3)$$

В нашем случае

$$V_1 = 4\pi R_1^3 / 3, V_2 = 4\pi R_2^3 / 3. \tag{4}$$

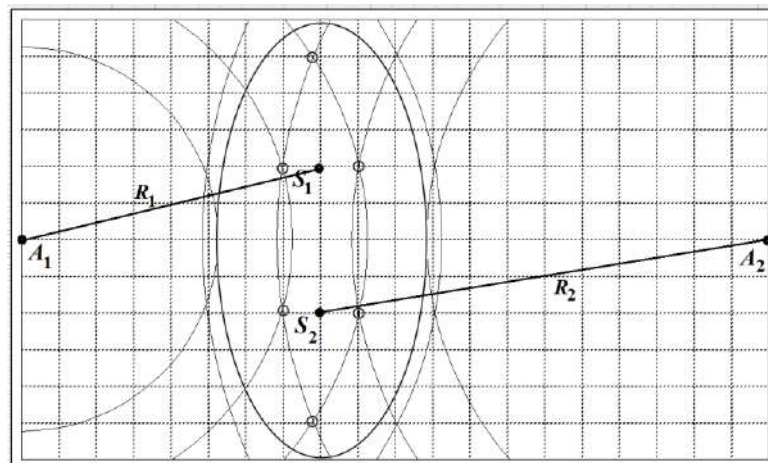
При этих условиях совместное решение уравнений (1)—(4) дает ответ

$$q = 32\pi\sqrt{\varepsilon_0\sigma R_1^3}. \tag{5}$$

| Содержание                              | баллы      |
|---|------------|
| $P_{\text{нач}} = P_{\text{пов}}$       | 0.5        |
| $P_{\text{кон}} = P_{\text{пов}} - P_3$ | 0.3        |
| $P_{\text{пов}} = 4\sigma/R$            | 0.3        |
| $P_3 = q^2/32\pi^2\varepsilon_0R^4$     | 0.5        |
| ЗСЭ вместо адиабаты                     | 0.5        |
| $W_{\text{пов}} = 8\pi R^2\sigma$       | 0.3        |
| $W_3 = q^2/8\pi\varepsilon_0R$          | 0.5        |
| $W_T = (5/2)\nu RT = (5/2)PV$           | 0.4        |
| Знает формулу объёма шара               | 0.2        |
| Правильный ответ                        | 0.5        |
| <b>Итого</b>                            | <b>4.0</b> |

### Задача 1С (3.0 балла)

Сигнал может быть подавлен посредством интерференции волн. Волны от источников  $S_1$  и  $S_2$  приходят к приемникам в одной фазе, поэтому волна, приходящая к приемникам от третьего источника, должна быть в противофазе к волнам от источников  $S_1$  и  $S_2$ . Для этого расстояние от третьего источника до точек приема должно отличаться на величину  $\frac{\lambda}{2} + m\lambda$  (где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Для нахождения точек, удовлетворяющих этим условиям, необходимо на выданном листе построить семейства окружностей радиусами  $R_1 + \frac{\lambda}{2} + m\lambda$  с центром в точке  $A_1$  и радиусами  $R_2 + \frac{\lambda}{2} + m\lambda$  с центром в точке  $A_2$ . Точки их пересечения и дадут искомые точки, где следует поместить третий источник, на рисунке они обозначены кружками. Амплитуда волны от третьего источника должна быть в 2 раза больше амплитуд волн, посылаемых источниками  $S_1$  и  $S_2$ , следовательно, интенсивность волны должна быть в 4 раза больше, т.е.  $4I_0$ .



| Содержание                                      | баллы      |
|---|------------|
| Сигналы гасятся благодаря интерференции волн;   | 0,5        |
| Условие минимума (волны в противофазе);         | 0,2        |
| Разность расстояний – полуцелое число длин волн | 0,3        |
| Построение двух семейств окружностей            | 2×0,5      |
| Искомые точки – точки пересечения окружностей   | 0,4        |
| Найдено 6 точек в выделенной области            | 6×0,1      |
| <b>Итого</b>                                    | <b>3,0</b> |

**Задача 2. Фантастические путешествия по Вселенной (10,0 балла)**

**1. Планеты диковинных форм (4,0 балла)**

1.1 [0,7 балла] Наиболее легким подходом к решению этого пункта будет проведение аналогии между силой Кулона и законом гравитации Ньютона:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \text{ и } F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}. \tag{1}$$

Далее, из теоремы Гаусса широко известен результат, что поле бесконечно большой заряженной плоскости, с поверхностной плотностью  $\sigma$  равно

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \tag{2}$$

По аналогии для плоской планеты результат будет схожим:

$$g_1 = \frac{\rho_1 h}{2 \cdot (1/4\pi G)} = 2\pi G \rho_1 h, \tag{3}$$

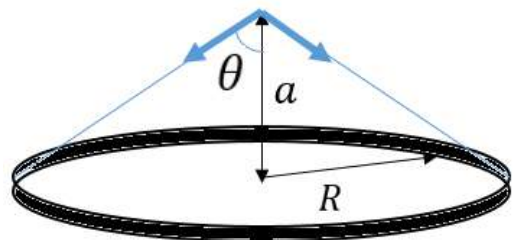
$$h = \frac{g_1}{2\pi G \rho_1} = 78,0 \text{ км}. \tag{4}$$

\*\*\*

Этот же результат нетрудно получить разбив бесконечную плоскость на тонкие кольца и проинтегрировав:

Сила притяжения от колечка с массой  $M$ , радиусом  $R$  на расстоянии  $a$  от его плоскости:

$$F = G \frac{Mm}{R^2 + a^2} \cos\theta = G \frac{Mm}{a^2} \cos^3\theta$$



Разобьем плоскость высоты  $h$  на тонкие колечки толщиной  $dr$ . Тогда сила притяжения со стороны колечка радиуса  $r$  будет равна

$$dF = G \frac{dMm}{a^2} \cos^3\theta = G \frac{(\rho_1 h 2\pi r dr)m}{a^2} \cos^3\theta$$

Из тригонометрических соображений  $r = a \cdot \tan\theta$ ,  $dr = \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta$

Подставляя в предыдущее выражение и интегрируя найдем суммарную силу  $F$  действующую на тело массы  $m$  со стороны бесконечной плоскости:

$$F = 2\pi G \rho_1 h m \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 2\pi G \rho_1 h m$$

Что идентично полученному ответу исходящему из аналогии с электростатическим полем.

1.2 [0,5 балла] Находясь вблизи бесконечной плоскости наблюдатель как-бы видит лишь нижнюю часть сферы, т.е видит лишь половину от максимального телесного угла:

$$\Omega_1 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi, \tag{5}$$

откуда из заданной в условии задачи формулы получаем

$$\alpha = \frac{g_1}{2\pi} \text{ или } \alpha = G \rho_1 h = 1,56 \times 10^{-2} \text{ м/с}^2 \tag{6}$$

1.3 [0,7 балла] Разобьем пирамиду на тонкие параллельные основанию слои толщиной  $\Delta h$ . Все эти слои будут видны из вершины пирамиды под одним и тем же телесным углом  $\Omega_2$ , таким что он равен одной шестой части от того если бы наблюдатель находился внутри куба:

$$\Omega_2 = \frac{1}{6} 4\pi = \frac{2}{3} \pi. \quad (7)$$

Притяжение от одного тонкого слоя

$$dg_2 = \frac{dF}{m} = \alpha \Omega_2 = \frac{2}{3} \pi G \rho_2 \Delta h, \quad (8)$$

или после суммирования по всем слоям пирамиды пирамиды будет

$$g_2 = \frac{1}{3} \pi G \rho_2 a = 3,14 \text{ м/с}^2. \quad (9)$$

1.4[2,0 балла] Пусть энергия взаимодействия корабля с пирамидальной планетой в момент взлета с вершины равна  $U_1$ , а его скорость в этот момент  $v_1$ . Из закона сохранения энергии для второй космической скорости получаем равенство:

$$\frac{mv_1^2}{2} - U_1 = 0. \quad (10)$$

Аналогично записывается закон сохранения энергии для старта с кубической планеты

$$\frac{mv_2^2}{2} - U_2 = 0, \quad (11)$$

где  $U_2$  – потенциальная энергия корабля на вершине куба.

Покажем, что между  $U_1$  и  $U_2$  существует простое соотношение. Для этого рассмотрим положение корабля в центре кубической планеты. С одной стороны положение в центре кубической планеты эквивалентно нахождению на вершинах сразу шести склеенных пирамид. Тогда потенциальная энергия корабля, находящегося в центре куба, с учетом изменения плотности вещества веществом планеты равна

$$U_c = 6U_1 \frac{\rho_3}{\rho_2}. \quad (12)$$

С другой стороны нахождение в центре куба эквивалентно нахождению в вершинах сразу восьми кубов смежных кубов сторонами  $\frac{a}{2}$ . В общем случае потенциальная энергия корабля в поле кубической планеты пропорциональна квадрату ее размера, так как

$$U = G \sum \frac{m\rho_3 \Delta V_i}{r_i} \sim Gm\rho_3 a^2. \quad (13)$$

Таким образом для куба вдвое меньшего размера энергия взаимодействия будет в 4 раза меньше, а значит потенциальная энергия корабля, находящегося в центре куба, равна

$$U_c = 8 \frac{U_2}{4} = 2U_2. \quad (14)$$

Приравняв выражения (12) и (14), находим

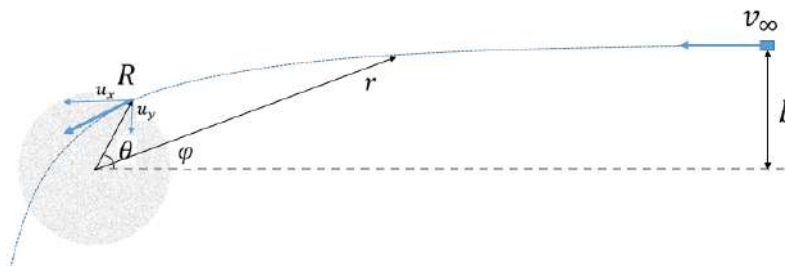
$$U_2 = 3U_1 \frac{\rho_3}{\rho_2}. \quad (15)$$

Решая совместно уравнения (10), (11) и (15), окончательно получим

$$v_2 = \sqrt{\frac{3\rho_3}{\rho_2}} v_1 = 6,30 \text{ км/с}. \quad (16)$$

## 2. Пылевое облако (6,0 балла)

2.1 [2,5 балла] Для данной задачи используем смесь декартовой и полярных систем координат.



По закону сохранения энергии:

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mu_x^2}{2} + \frac{mu_y^2}{2} - G \frac{Mm}{R}, \quad (17)$$

где  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_4$  – полная масса облака.

Изменения импульса корабля в проекции на ось  $x$  декартовой системы координат имеет вид

$$mv_x - mv_\infty = \int G \frac{Mm}{r^2} \cos\varphi dt = \int G \frac{Mm}{r^2 b} \cos\varphi d\varphi. \quad (18)$$

Из закона сохранения момента импульса для системы с центральносимметричными силами имеем:

$$r^2 \dot{\varphi} = v_\infty b. \quad (19)$$

Таким образом

$$mv_x - mv_\infty = G \frac{Mm}{v_\infty b} \int_0^\theta \cos\varphi d\varphi = G \frac{Mm}{v_\infty b} \sin\theta. \quad (20)$$

Аналогично для проекции на ось  $y$ :

$$mv_y - m \cdot 0 = G \frac{Mm}{v_\infty b} \int_0^\theta \sin\varphi d\varphi = G \frac{Mm}{v_\infty b} (1 - \cos\theta). \quad (21)$$

Для упрощения дальнейших преобразований введем безразмерную величину

$$z = \frac{GM}{v_\infty^2 b}, \quad (22)$$

тогда

$$u_x = (1 + z \sin\theta) v_\infty, \quad (23)$$

$$u_y = z(1 - \cos\theta) v_\infty. \quad (24)$$

Подставим уравнения (23) и (24) в (17), получаем

$$1 = (1 + z \sin\theta)^2 + z^2(1 - \cos\theta)^2 - 2z \frac{b}{R}. \quad (25)$$

Решая уравнения относительно  $\theta$ , находим

$$\theta = \arcsin \frac{\frac{b}{R} - \frac{GM}{v_\infty^2 b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{GM}{v_\infty^2 b}\right)^2}} + \arcsin \frac{\frac{GM}{v_\infty^2 b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{GM}{v_\infty^2 b}\right)^2}}, \quad (26)$$

или

$$\theta = 2 \arctan \frac{1 - \sqrt{1 + 2 \frac{GM}{v_\infty^2 b} \frac{b}{R} - \frac{b^2}{R^2}}}{\frac{b}{R} - 2 \frac{GM}{v_\infty^2 b}} = 0,789 \text{ рад} = 45,2^\circ. \quad (27)$$

Стоит отметить что угол  $\theta$ , также как и суммарный угол отклонения траектории при движении через пылевое облако, может быть получен путем интегрирования уравнения, получающегося из комбинации законов сохранения энергии и момента импульса записанных в полярной системе координат. Выражения здесь не приводятся так как интегралы являются довольно громоздкими.

**2.2[2,0 балла]** Для начала найдем как зависит потенциальная энергия взаимодействия корабля с облаком от расстояния  $r < R$  до его центра. Известно, что слои сферического облака, лежащие на расстоянии большем  $r$ , не будут воздействовать на тело, поэтому суммарная действующая сила равна

$$F(r) = -G \frac{\rho_4 \frac{4}{3} \pi r^3}{r^2} m = -\frac{4}{3} \pi G \rho_4 m r, \quad (28)$$

а соответствующая ей потенциальная энергия

$$U(r) = -\int F(r) dr = \frac{2}{3} \pi G \rho_4 m r^2 + C = G \frac{Mm}{2R^3} r^2 + C. \quad (29)$$

Для нахождения константы интегрирования  $C$  воспользуемся тем, что потенциальная энергия должна быть непрерывной функцией в точке  $r = R$ , откуда

$$G \frac{Mm}{2R^3} R^2 + C = -G \frac{Mm}{R}, \quad (30)$$

или окончательно для  $r < R$

$$U(r) = \frac{GMm}{2R^3} r^2 - \frac{3GMm}{2R}. \quad (31)$$

В момент когда расстояние до центра облака минимально радиальная составляющая скорости равна нулю. Тогда из законов сохранения энергии и момента импульса

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{GMm}{2R^3} r_{\min}^2 - \frac{3GMm}{2R}, \quad (32)$$

$$v_0 r_{\min} = v_\infty b, \quad (33)$$

получаем уравнение

$$1 = \frac{b^2}{r_{min}^2} + z \frac{r_{min}^2 b}{R^3} - 3z \frac{b}{R}, \tag{34}$$

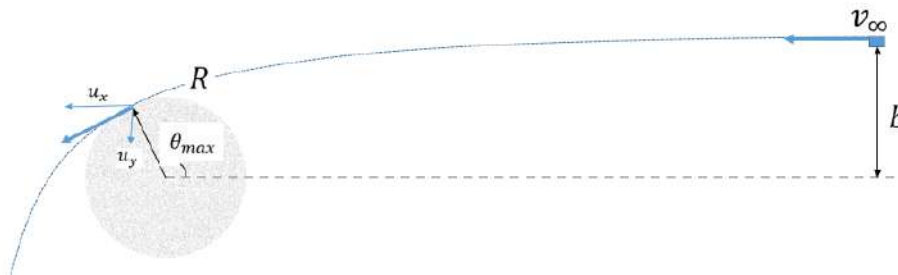
которое имеет решения

$$r_{min} = \sqrt{\frac{(\frac{3zb}{R}+1) \pm \sqrt{(\frac{3zb}{R}+1)^2 - \frac{4zb^3}{R^3}}}{\frac{2zb}{R^3}}}. \tag{35}$$

Смысл имеет только наименьший корень, так как при  $b = 0$  должно быть  $r_{min} = 0$ , откуда окончательно

$$r_{min} = R \sqrt{\frac{(\frac{3GM}{v_{\infty}^2 R}+1) - \sqrt{(\frac{3GM}{v_{\infty}^2 R}+1)^2 - \frac{4b^2 GM}{R^3 v_{\infty}^2}}}{\frac{2GM}{v_{\infty}^2 R}}} = 4,97 \times 10^9 \text{ м}. \tag{36}$$

2.3[1,0 балла] Минимальная скорость  $v_{\infty, min}$ , позволяющая избежать столкновения, соответствует ситуации, когда корабль его лишь слегка «касается» облака.



В таком случае радиальная составляющая скорости равна нулю, а законы сохранения энергии и момента импульса записываются в виде:

$$\frac{mv_{\infty, min}^2}{2} = \frac{m0^2}{2} + \frac{mu_{\tau}^2}{2} - G \frac{Mm}{R}, \tag{37}$$

$$u_{\tau} R = v_{\infty} b, \tag{38}$$

откуда

$$v_{\infty, min} = \sqrt{\frac{2GM}{R(\frac{b^2}{R^2}-1)}} = 252 \text{ км/с}. \tag{39}$$

2.4[0,6балла] Предположим, что облако растаскивают на бесконечные расстояния так, что оно все время остается симметричным, а убираются тонкие слои толщиной  $\Delta r$ . Чтобы убрать один такой тонкий слой в момент когда облако имеет радиус  $r$  необходимо совершить работу

$$\Delta A = G \frac{(\rho_4 \frac{4}{3} \pi r^3)(\rho_4 4 \pi r^2 \Delta r)}{r} = \frac{16}{3} \pi^2 G \rho_4^2 r^4 \Delta r, \tag{40}$$

а чтобы растащить все облако необходимо совершить работу

$$A = \frac{16}{3} \pi^2 G \rho_4^2 \int_0^R r^4 \Delta r = \frac{16}{15} \pi^2 G \rho_4^2 R^5 = 1,33 \times 10^{45} \text{ Дж}. \tag{41}$$

| №   | Содержание  | баллы |     |
|-----|---|-------|-----|
| 1.1 | Аналогия между силой Кулона и законом гравитации Ньютона<br>формула (1): $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$ и $F = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$ . | 0,2   | 0,7 |
|     | Формула (2) $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  | 0,2   |     |
|     | Формула (4) $h = \frac{g_1}{2\pi G \rho_1}$   | 0,2   |     |
|     | Численное значение $h = 78,0 \text{ км}$  | 0,1   |     |
| 1.2 | Формула (5) $\Omega_1 = 2\pi$   | 0,2   | 0,5 |
|     | Формула (6) $\alpha = \frac{g_1}{2\pi}$ или $\alpha = G \rho_1 h$   | 0,2   |     |
|     | Численное значение $\alpha = 1,56 \times 10^{-2} \text{ м/с}^2$   | 0,1   |     |

|  |  |     |     |
|--|--|-----|-----|
| 1.3  | Формула (7) $\Omega_2 = \frac{2}{3}\pi$  | 0,2 | 0,7 |
|  | Формула (8) $dg_2 = \frac{dF}{m} = \alpha\Omega_2 = \frac{2}{3}\pi G\rho_2\Delta h$  | 0,2 |     |
|  | Формула (9) $g_2 = \frac{1}{3}\pi G\rho_2 a$   | 0,2 |     |
|  | Численное значение $g_2 = 3,14\text{м/с}^2$  | 0,1 |     |
| 1.4  | Формулы (10) и (11) $\frac{mv_1^2}{2} - U_1 = 0$ $\frac{mv_2^2}{2} - U_2 = 0$  | 0,2 | 2,0 |
|  | Формула (12) $U_c = 6U_1 \frac{\rho_3}{\rho_2}$  | 0,4 |     |
|  | Формула (13) $U = G \sum \frac{m\rho_3\Delta V_i}{r_i} \sim Gm\rho_3 a^2$  | 0,4 |     |
|  | Формула (14) $U_c = 8 \frac{U_2}{4} = 2U_2$  | 0,2 |     |
|  | Формула (15) $U_2 = 3U_1 \frac{\rho_3}{\rho_2}$  | 0,4 |     |
|  | Формула (16) $v_2 = \sqrt{\frac{3\rho_3}{\rho_2}} v_1$   | 0,3 |     |
|  | Численное значение $v_2 = 6,30\text{км/с}$   | 0,1 |     |
| 2.1  | Формула (17) $\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mu_x^2}{2} + \frac{mu_y^2}{2} - G \frac{Mm}{R}$  | 0,2 | 2,5 |
|  | Формула (18) $mu_x - mv_\infty = \int G \frac{Mm}{r^2} \cos\varphi dt = \int G \frac{Mm}{r^2\dot{\varphi}} \cos\varphi d\varphi$   | 0,4 |     |
|  | Формула (19) $r^2\dot{\varphi} = v_\infty b$   | 0,2 |     |
|  | Формула (20) $mu_x - mv_\infty = G \frac{Mm}{v_\infty b} \sin\theta$   | 0,4 |     |
|  | Формула (21) $mu_y = G \frac{Mm}{v_\infty b} (1 - \cos\theta)$   | 0,4 |     |
|  | Формула (23) или аналогичные $u_x = (1 + z\sin\theta)v_\infty$   | 0,3 |     |
|  | Формула (24) или аналогичные $u_y = z(1 - \cos\theta)v_\infty$   | 0,3 |     |
|  | Формула (26) или формула (27)<br>$\theta = \arcsin \frac{\frac{b}{R} \frac{GM}{v_\infty^2 b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{GM}{v_\infty^2 b}\right)^2}} + \arcsin \frac{\frac{GM}{v_\infty^2 b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{GM}{v_\infty^2 b}\right)^2}}$ или<br>$\theta = 2 \arctan \frac{1 - \sqrt{1 + 2 \frac{GM}{v_\infty^2 b} \frac{b}{R} - \frac{b^2}{R^2}}}{\frac{b}{R} - 2 \frac{GM}{v_\infty^2 b}}$ | 0,2 |     |
| Численное значение $\theta = 0,789\text{рад} = 45,2^\circ$ | 0,1  |     |     |
| 2.2  | Формула (28) $F(r) = -G \frac{\rho_4 \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} m = -\frac{4}{3}\pi G\rho_4 mr$  | 0,4 | 2,0 |
|  | Формула (29) $U(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho_4 mr^2 + C = G \frac{Mm}{2R^3} r^2 + C$  | 0,3 |     |
|  | Формула (30) $G \frac{Mm}{2R^3} R^2 + C = -G \frac{Mm}{R}$   | 0,4 |     |
|  | Формула (32) $\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{GMm}{2R^3} r_{min}^2 - \frac{3GMm}{2R}$   | 0,2 |     |
|  | Формула (33) $v_0 r_{min} = v_\infty b$  | 0,2 |     |
|  | Формула (35) $r_{min} = \sqrt{\frac{(\frac{3zb}{R} + 1) \pm \sqrt{(\frac{3zb}{R} + 1)^2 - \frac{4zb^3}{R^3}}}{2 \frac{zb}{R^3}}}$  | 0,2 |     |
|  | Выбран меньший корень, формула (36)<br>Численное значение $r_{min} = 4,97 \times 10^9\text{м}$   | 0,1 |     |
| 2.3  | Формула (37) $\frac{mv_{\infty,min}^2}{2} = \frac{m0^2}{2} + \frac{mu_t^2}{2} - G \frac{Mm}{R}$  | 0,4 | 1,0 |

|              |   |     |             |
|--------------|---|-----|-------------|
|              | Формула (38) $u_r R = v_\infty b$   | 0,3 |             |
|              | Формула (39) $v_{\infty, min} = \sqrt{\frac{2GM}{R\left(\frac{b^2}{R^2}-1\right)}}$ | 0,2 |             |
|              | Численное значение $v_{\infty, min} = 252 \text{ км/с}$                             | 0,1 |             |
| 2.4          | Формула (40) $\Delta A = \frac{16}{3} \pi^2 G \rho_4^2 r^4 \Delta r$                | 0,3 | 0,6         |
|              | Формула (41) $A = \frac{16}{15} \pi^2 G \rho_4^2 R^5$                               | 0,2 |             |
|              | Численное значение $A = 1,33 \times 10^{45} \text{ Дж}$                             | 0,1 |             |
| <b>Итого</b> |   |     | <b>10,0</b> |

**Задача 3. Сопротивление призмы (10,0 балла)**

**1. Математическое введение (3,0 балла)**

1.1 [0,2 балла] Из школьного курса математики известно, что члены геометрической прогрессии выражаются в явном виде так

$$x_k = A \lambda^k. \tag{1}$$

1.2 [0,4 балла] Выразим  $\lambda^k$  рекуррентно через  $\lambda^{k-1}$ :

$$\lambda^k = \lambda^{k-1} \cdot \lambda$$

и преобразуем его с помощью приведенной формы

$$\begin{aligned} \lambda^k &= (p_k + q_k \sqrt{3}) = (p_{k-1} + q_{k-1} \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) = 2p_{k-1} + p_{k-1} \sqrt{3} + 2q_{k-1} \sqrt{3} + 3q_{k-1} = \\ &= (2p_{k-1} + 3q_{k-1}) + (p_{k-1} + 2q_{k-1}) \sqrt{3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Из этого равенства следуют требуемые рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} p_k &= 2p_{k-1} + 3q_{k-1} \\ q_k &= p_{k-1} + 2q_{k-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Обратные соотношения получаются аналогично:

$$\begin{aligned} \lambda^{k-1} &= p_{k-1} + q_{k-1} = \lambda^k \cdot \lambda^{-1} = (p_k + q_k \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = \\ &= (2p_k - 3q_k) + (2q_k - p_k) \sqrt{3}, \end{aligned} \tag{4}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} p_{k-1} &= 2p_k - 3q_k \\ q_{k-1} &= 2q_k - p_k. \end{aligned} \tag{5}$$

1.3 [0,7 балла] Расчет коэффициентов легко провести последовательно, учитывая, что  $p_0 = 1, q_0 = 0$ . Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1.

| $k$ | $p_k$ | $q_k$ |
|-----|-------|-------|
| 0   | 1     | 0     |
| 1   | 2     | 1     |
| 2   | 7     | 4     |
| 3   | 26    | 15    |
| 4   | 97    | 56    |
| 5   | 362   | 209   |

1.4 [0,2 балла] Можно заметить, что

$$\lambda^{-1} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}, \tag{6}$$

поэтому



$$\lambda^{-k} = (2 - \sqrt{3})^k = p_k - q_k \sqrt{3}. \quad (7)$$

1.5 [1,0 балла]Используя подсказку, подставим величины  $x_k = C\lambda^k$  в рекуррентное соотношение и получим уравнение для определения  $\lambda$  в виде

$$\lambda^{k+1} = 4\lambda^k - \lambda^{k-1}. \quad (8)$$

После сокращения получим квадратное уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0, \quad (9)$$

решением которого являются

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}. \quad (10)$$

Следовательно, в общем виде члены последовательности, заданной рекуррентным соотношением (3) в условии задачи, в явном виде могут быть описаны формулой

$$x_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k, \quad (11)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные, которые могут быть найдены из граничных условий:

$$x_0 = A \Rightarrow C_1 + C_2 = A \quad (12)$$

$$x_0 = B \Rightarrow C_1 \lambda_1^N + C_2 \lambda_2^N = B.$$

Решая полученную систему линейных уравнений, получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = A \\ C_1 \lambda_1^N + C_2 \lambda_2^N = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{B - A\lambda_2^N}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} \\ C_2 = \frac{A\lambda_1^N - B}{\lambda_1^N - \lambda_2^N}. \end{cases} \quad (13)$$

Подставив это решение в выражение (11), преобразуем его к симметричному виду

$$\begin{aligned} x_k &= C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k = \frac{B - A\lambda_2^N}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} \lambda_1^k + \frac{A\lambda_1^N - B}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} \lambda_2^k = \\ &= \frac{A\lambda_1^N \lambda_2^k - B\lambda_2^k + B\lambda_1^k - A\lambda_2^N \lambda_1^k}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} = \frac{A(\lambda_1^{N-k} - \lambda_2^{N-k}) + B(\lambda_1^k - \lambda_2^k)}{\lambda_1^N - \lambda_2^N}. \end{aligned} \quad (14)$$

При выводе последнего соотношения учтено, что по теореме Виета  $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ .

1.6 [0,5 балла]С учетом полученных формул для  $\lambda_{1,2}^k$ , найдем, что

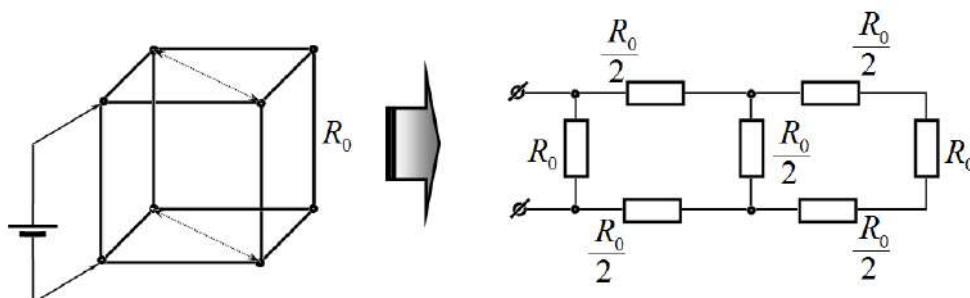
$$\lambda_1^k - \lambda_2^k = \lambda_1^k - \lambda_1^{-k} = (p_k + q_k \sqrt{3}) - (p_k - q_k \sqrt{3}) = 2q_k \sqrt{3}, \quad (15)$$

откуда окончательно получим

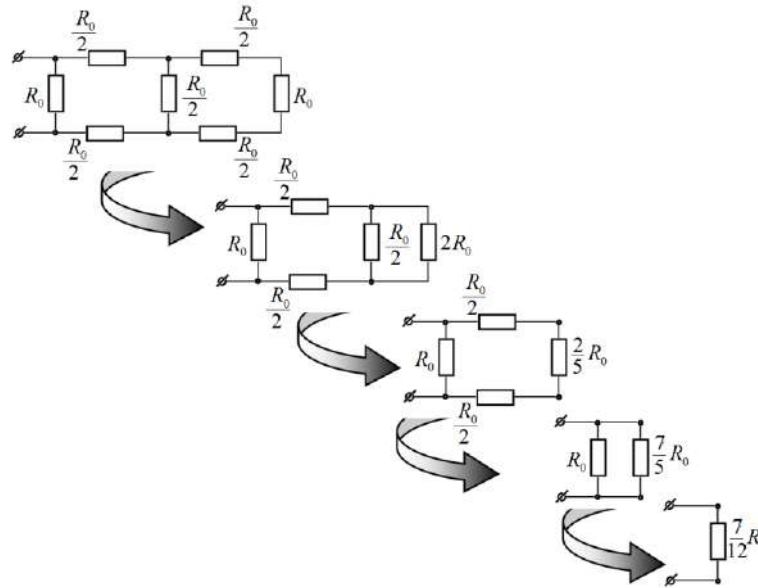
$$x_k = \frac{A(\lambda_1^{N-k} - \lambda_2^{N-k}) + B(\lambda_1^k - \lambda_2^k)}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} = \frac{Aq_{N-k} + Bq_k}{q_N}. \quad (16)$$

## 2. Проволочный каркас в форме призмы (7,0 балла)

2.1 [0,8 балла]Если соединить вершины куба, имеющие одинаковый потенциал, то получим следующую эквивалентную схему



которая поддается расчету стандартными методами



Итого: сопротивление куба при заданном подключении равно

$$R = \frac{7}{12} R_0. \tag{17}$$

2.2 [0,2 балла] Явная симметрия схемы и начальных условий дает очевидные соотношения

$$y_k = -x_k, \tag{18}$$

$$x_{N-k} = x_k. \tag{19}$$

2.3 [1,0 балла] Алгебраическая сумма сил токов, входящих в узел равна нулю, поэтому для узла  $x_k$  можно записать, с учетом закона Ома, следующее уравнение

$$\frac{x_{k-1} - x_k}{R_0} + \frac{x_{k+1} - x_k}{R_0} + \frac{y_k - x_k}{R_0} = 0. \tag{20}$$

Так как  $y_k = -x_k$ , то из полученного уравнения следует

$$x_{k+1} - 4x_k + x_{k-1} = 0. \tag{21}$$

2.4 [0,2 балла] Для однозначного определения всех величин  $x_k$  в явном виде необходимо задать два граничных условия. В качестве таких могут быть выбраны заданное значение начального потенциала

$$x_0 = \varphi_0, \tag{22}$$

а в качестве второго – условие симметрии (19), которое справедливо при любом  $k$ , в частности при  $k = 0$  (несмотря на то, что узел номером  $N$  в схеме нет!)

$$x_N = x_0. \tag{23}$$

2.5 [0,2 балла] Рекуррентное соотношение (21) рассмотрено в Математическом введении. Поэтому можно воспользоваться полученным решением (16), если положить  $A = B = \varphi_0$ :

$$x_k = \frac{Aq_{N-k} + Bq_k}{q_N} = \varphi_0 \frac{q_{N-k} + q_k}{q_N}. \tag{24}$$

2.6 [0,4 балла] Сила тока в цепи источника равна сумме токов, вытекающих из узла  $x_0$ :

$$I = \frac{x_0 - x_1}{R_0} + \frac{x_0 - x_{N-1}}{R_0} + \frac{x_0 - y_0}{R_0} = \frac{4x_0 - 2x_1}{R_0}. \tag{25}$$

Здесь принято во внимание, что  $y_0 = -x_0$ ,  $x_{N-1} = x_1$ . Подставляя найденные значения  $x_0, x_1$ , получим

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{4x_0 - 2x_1}{R_0} = \frac{2}{R_0} \left( 2\phi_0 - \phi_0 \frac{q_{N-1} + q_1}{q_N} \right) = \frac{2\phi_0}{R_0} \left( 2 - \frac{q_{N-1} + 1}{q_N} \right) = \\
 &= \frac{2\phi_0}{R_0} \frac{2q_N - q_{N-1} - 1}{q_N} = \frac{2\phi_0}{R_0} \frac{2q_N - (2q_N - p_N) - 1}{q_N} = \frac{2\phi_0}{R_0} \frac{p_N - 1}{q_N}.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

На последнем шаге использовано соотношение (5)  $q_{N-1} = 2q_N - p_N$ .

2.7 [0,2 балла] На входе рассматриваемой сети напряжение равно

$$U_0 = 2\phi_0, \tag{27}$$

следовательно, ее сопротивление можно рассчитать по изящной формуле

$$R_N = \frac{U_0}{I_0} = R_0 \frac{q_N}{p_N - 1}. \tag{28}$$

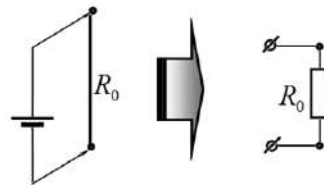
2.8 [1,0 балла] Расчеты легко провести с помощью чисел Таблицы 1.

Таблица 2. Сопротивления призм.

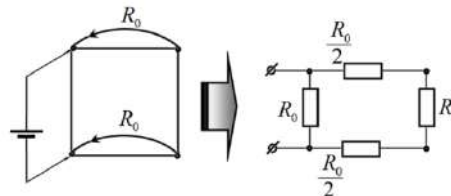
| $N$ | $p_N$ | $q_N$ | $R_N$                                       |
|-----|-------|-------|---|
| 1   | 2     | 1     | $R_0$                                       |
| 2   | 7     | 4     | $R_0 \frac{4}{7-1} = \frac{2}{3} R_0$       |
| 3   | 26    | 15    | $R_0 \frac{15}{26-1} = \frac{3}{4} R_0$     |
| 4   | 97    | 56    | $R_0 \frac{56}{97-1} = \frac{7}{12} R_0$    |
| 5   | 362   | 209   | $R_0 \frac{209}{362-1} = \frac{11}{19} R_0$ |

Значение сопротивления кубического каркаса для  $N = 4$  совпадает с найденным ранее.

2.9 [0,5 балла] Для  $N = 1$  схема очевидна:



При  $N = 2$  следует не забыть «замкнуть» призму:



В обоих случаях сопротивления этих призм соответствуют значениям, приведенным в Таблице 2.

2.10 [1,0 балла] Предел формулы (28) можно найти различными способами, например, выразив

$$p_N = \frac{1}{2}(\lambda^N - \lambda^{-N}), \quad q_N = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda^N + \lambda^{-N}), \tag{29}$$

где  $\lambda = 2 + \sqrt{3} > 1$ .

Тогда

$$R_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} R_N = R_0 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q_N}{p_N - 1} = R_0 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda^N + \lambda^{-N})}{\frac{1}{2}(\lambda^N - \lambda^{-N}) - 1} = \frac{R_0}{\sqrt{3}}. \quad (30)$$

2.11 [1,5 балла]Рассчитаем

$$\frac{R_\infty}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577. \quad (31)$$

Затем проведем расчет относительной погрешности этого приближенного выражения для различных возрастающих  $N$  с помощью данных Таблицы 2.

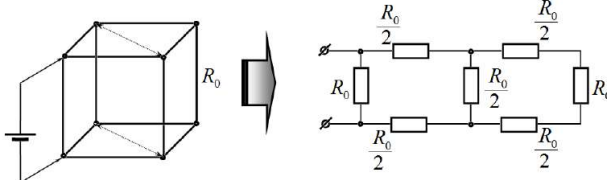
Таблица 3.

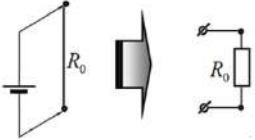
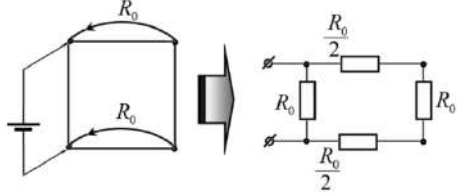
| $N$ | $R_N$              | $\frac{R_N}{R_0}$ | $\varepsilon = \frac{R_\infty - R_N}{R_N}$ |
|-----|--------------------|-------------------|--|
| 1   | $R_0$              | 1,000             | -0,423                                     |
| 2   | $\frac{2}{3}R_0$   | 0,667             | -0,134                                     |
| 3   | $\frac{3}{4}R_0$   | 0,750             | -0,038                                     |
| 4   | $\frac{7}{12}R_0$  | 0,583             | -0,010                                     |
| 5   | $\frac{11}{19}R_0$ | 0,579             | <-0,004                                    |

Видим, что уже при  $N=4$  погрешность равна 1%. Следовательно, в данной задаче бесконечность равна четырем!

$$\infty \approx 4. \quad (32)$$

| №   | Содержание   | баллы |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
|-----|--|-------|------------|-------|-------|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|---|----|----|---|-----|-----|
| 1.1 | Формула (1) $x_k = A\lambda^k$   | 0,2   | <b>0,2</b> |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
| 1.2 | Формулы (3) $p_k = 2p_{k-1} + 3q_{k-1}$<br>$q_k = p_{k-1} + 2q_{k-1}$  | 0,2   | <b>0,4</b> |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
|     | Формулы (5) $p_{k-1} = 2p_k - 3q_k$<br>$q_{k-1} = 2q_k - p_k$  | 0,2   |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
| 1.3 | Начальные значения $p_0 = 1, q_0 = 0$  | 0,2   | <b>0,7</b> |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
|     | Правильные значения в таблице 1.   | 0,5   |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
|     | Таблица 1.   |       |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
|     | <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <th><math>k</math></th> <th><math>p_k</math></th> <th><math>q_k</math></th> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>7</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>26</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>97</td> <td>56</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>362</td> <td>209</td> </tr> </table> |       |            | $k$   | $p_k$ | $q_k$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 | 7 | 4 | 3 | 26 | 15 | 4 | 97 | 56 | 5 | 362 | 209 |
|     | $k$  |       |            | $p_k$ | $q_k$ |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
|     | 0  |       |            | 1     | 0     |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
| 1   | 2  | 1     |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
| 2   | 7  | 4     |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
| 3   | 26   | 15    |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
| 4   | 97   | 56    |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
| 5   | 362  | 209   |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
|     |  |       |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
|     |  |       |            |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
| 1.4 | Формула (7) $\lambda^{-k} = p_k - q_k\sqrt{3}$   | 0,2   | <b>0,2</b> |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |
| 1.5 | Формула (10) $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$  | 0,2   | <b>1,0</b> |       |       |       |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |   |    |    |   |     |     |

|            | Формула (11) $x_k = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k$   | 0,2   |                                       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
|------------|--|-------|---------------------------------------|-------|-------|---|---|---|-------|---|---|---|---------------------------------------|-----|------------|
|            | Система (12) $C_1 + C_2 = A$<br>$C_1\lambda_1^N + C_2\lambda_2^N = B$  | 0,2   |                                       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
|            | Решение (13) $\begin{cases} C_1 = \frac{B - A\lambda_2^N}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} \\ C_2 = \frac{A\lambda_1^N - B}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} \end{cases}$  | 0,2   |                                       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
|            | Формула (14) $x_k = \frac{A(\lambda_1^{N-k} - \lambda_2^{N-k}) + B(\lambda_1^k - \lambda_2^k)}{\lambda_1^N - \lambda_2^N}$   | 0,2   |                                       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| <b>1.6</b> | Формула (16) $x_k = \frac{Aq_{N-k} + Bq_k}{q_N}$   | 0,5   | <b>0,5</b>                            |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| <b>2.1</b> |  <p>Эквивалентная схема</p>  | 0,3   | <b>0,8</b>                            |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
|            | Формула (17) $R = \frac{7}{12} R_0$  | 0,5   |                                       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| <b>2.2</b> | Формула (18) $y_k = -x_k$  | 0,1   | <b>0,2</b>                            |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
|            | Формула (19) $x_{N-k} = x_k$   | 0,1   |                                       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| <b>2.3</b> | Формула (20) $\frac{x_{k-1} - x_k}{R_0} + \frac{x_{k+1} - x_k}{R_0} + \frac{y_k - x_k}{R_0} = 0$   | 0,5   | <b>1,0</b>                            |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
|            | Формула (21) $x_{k+1} - 4x_k + x_{k-1} = 0$  | 0,5   |                                       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| <b>2.4</b> | Формула (22) $x_0 = \varphi_0$   | 0,1   | <b>0,2</b>                            |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
|            | Формула (23) $x_N = x_0$   | 0,1   |                                       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| <b>2.5</b> | Формула (24) $x_k = \frac{Aq_{N-k} + Bq_k}{q_N} = \varphi_0 \frac{q_{N-k} + q_k}{q_N}$   | 0,2   | <b>0,2</b>                            |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| <b>2.6</b> | Формула (25) $I = \frac{4x_0 - 2x_1}{R_0}$   | 0,2   | <b>0,4</b>                            |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
|            | Формула (26) $I_0 = \frac{2\varphi_0}{R_0} \frac{p_N - 1}{q_N}$  | 0,2   |                                       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| <b>2.7</b> | Формула (27) $U_0 = 2\varphi_0$  | 0,1   | <b>0,2</b>                            |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
|            | Формула (28) $R_N = \frac{U_0}{I_0} = R_0 \frac{q_N}{p_N - 1}$   | 0,1   |                                       |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| <b>2.8</b> | <p>Правильные значения в таблице 2.</p> <p>Таблица 2. Сопротивления призм.</p> <table border="1" data-bbox="427 1870 1082 2047"> <thead> <tr> <th><math>N</math></th> <th><math>p_N</math></th> <th><math>q_N</math></th> <th><math>R_N</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>1</td> <td><math>R_0</math></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>7</td> <td>4</td> <td><math>R_0 \frac{4}{7-1} = \frac{2}{3} R_0</math></td> </tr> </tbody> </table> | $N$   | $p_N$                                 | $q_N$ | $R_N$ | 1 | 2 | 1 | $R_0$ | 2 | 7 | 4 | $R_0 \frac{4}{7-1} = \frac{2}{3} R_0$ | 1,0 | <b>1,0</b> |
| $N$        | $p_N$  | $q_N$ | $R_N$                                 |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| 1          | 2  | 1     | $R_0$                                 |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |
| 2          | 7  | 4     | $R_0 \frac{4}{7-1} = \frac{2}{3} R_0$ |       |       |   |   |   |       |   |   |   |                                       |     |            |

|   |  |                   |                   |  |   |     |             |     |
|---|--|-------------------|-------------------|--|---|-----|-------------|-----|
|   |  | 3                 | 26                | 15   | $R_0 \frac{15}{26-1} = \frac{3}{4} R_0$     |     |             |     |
|   |  | 4                 | 97                | 56   | $R_0 \frac{56}{97-1} = \frac{7}{12} R_0$    |     |             |     |
|   |  | 5                 | 362               | 209  | $R_0 \frac{209}{362-1} = \frac{11}{19} R_0$ |     |             |     |
| 2.9   | Эквивалентная схема для $N = 1$  |                   |                   |  |   |     | 0,1         | 0,5 |
|   |                                   |                   |                   |  |   |     |             |     |
| Эквивалентная схема для $N = 2$   |  |                   |                   |  |   | 0,4 |             |     |
|  |  |                   |                   |  |   |     |             |     |
| 2.10  | Формула (29) $p_N = \frac{1}{2}(\lambda^N - \lambda^{-N})$ , $q_N = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\lambda^N + \lambda^{-N})$ |                   |                   |  |   |     | 0,5         | 1,0 |
|   | Формула (30) $R_\infty = \frac{R_0}{\sqrt{3}}$   |                   |                   |  |   |     | 0,5         |     |
| Формула (31) $\frac{R_\infty}{R_0} \approx 0,577$                                 |  |                   |                   |  |   | 0,2 |             |     |
| 2.11  | Правильные значения в таблице 3.   |                   |                   |  |   |     | 1,0         | 1,5 |
|   | Таблица 3.   |                   |                   |  |   |     |             |     |
|   | $N$  | $R_N$             | $\frac{R_N}{R_0}$ | $\varepsilon = \frac{R_\infty - R_N}{R_N}$ |   |     |             |     |
|   | 1  | $R_0$             | 1,000             | -0,423                                     |   |     |             |     |
|   | 2  | $\frac{2}{3} R_0$ | 0,667             | -0,134                                     |   |     |             |     |
|   | 3  | $\frac{3}{4} R_0$ | 0,750             | -0,038                                     |   |     |             |     |
| 4   | $\frac{7}{12} R_0$   | 0,583             | -0,010            |  |   |     |             |     |
| 5   | $\frac{11}{19} R_0$  | 0,579             | <-0,004           |  |   |     |             |     |
| Формула (32) $\infty \approx 4$   |  |                   |                   |  |   | 0,3 |             |     |
| <b>Итого</b>  |  |                   |                   |  |   |     | <b>10,0</b> |     |