

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ТУРА

Крутильный маятник (15,0 балла)

Часть 1. Свободные малые колебания (5,0 балла)

1.1 Результаты измерений зависимости периода колебаний от длины нитей приведены в Таблице 1. Для каждой длины нитей l проведено 3 измерения времен по 10 колебаний. Период колебаний T рассчитан по среднему значению измеренных времен.

Таблица 1.

$l, \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$T, \text{ с}$	$T^2, \text{ с}^2$
61	48,19	48,02	48,34	4,82	23,22
49	43,57	43,31	43,81	4,36	18,98
39	38,56	38,34	38,37	3,84	14,76
28	33,1	32,94	32,78	3,29	10,85
19	26,44	27,03	26,62	2,67	7,13
10	18,91	19,35	19,22	1,92	3,67

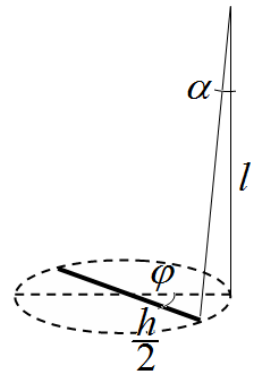
1.2 При повороте болтов в горизонтальной плоскости на малый угол φ нити подвеса отклонятся от вертикали на малый угол α . Связь между этими углами геометрическая и имеет вид

$$\frac{h}{2}\varphi = l\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{h}{2l}\varphi, \quad (1)$$

где l – длина нитей подвеса, h – расстояние между ними.

При таком повороте болты приподнимутся, при этом потенциальная энергия возрастет на величину

$$\Delta U = mgl(1 - \cos \alpha) \approx mgl \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2} mgl \left(\frac{h}{2l} \varphi \right)^2. \quad (2)$$



Уравнение закона сохранения энергии при крутильных колебаниях имеет вид

$$\frac{I\omega^2}{2} + \frac{1}{2} mgl \left(\frac{h}{2l} \varphi \right)^2 = E = const, \quad (3)$$

где I – момент инерции маятника.

Закон сохранения энергии (3) соответствует гармоническим колебаниям с периодом

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{I}{mg} \frac{l}{h^2}}. \quad (4)$$

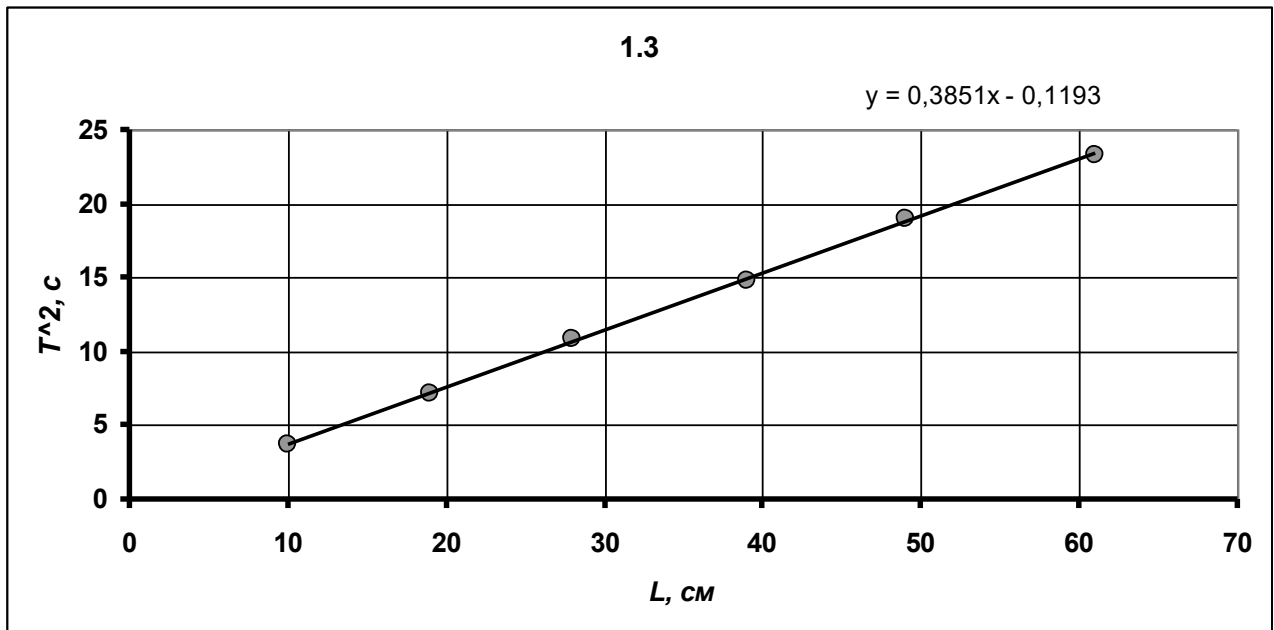
1.3 Для проверки полученной формулы следует построить график зависимости квадрата периода от длины нитей¹ (рис. 1.1) Полученная прямо пропорциональная зависимость доказывает справедливость формулы (4).

Коэффициенты линейной зависимости $T^2 = al + b$, рассчитанные по МНК, оказались равными

$$a = (0,385 \pm 0,009) \frac{\text{с}^2}{\text{см}}, \quad b = -(0,12 \pm 0,3) \text{с}^2. \quad (5)$$

Так как $\Delta b < b$, то зависимость можно считать прямо пропорциональной.

¹ Допустима и другая линеаризация $T(\sqrt{l})$, двойной логарифмический масштаб (с доказательством того, что коэффициент наклона равен 0,5)



1.4 Из формулы (4) следует, что период колебаний может быть выражен через радиус инерции следующим образом

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{I}{mg} \frac{l}{h^2}} = 4\pi \sqrt{\frac{mR^2}{mg} \frac{l}{h^2}} = \frac{4\pi R}{h\sqrt{g}} \sqrt{l}. \quad (6)$$

Следовательно, найденный коэффициент наклона графика 1.3 позволяет рассчитать радиус инерции по формуле

$$a = \left(\frac{4\pi R}{h\sqrt{g}} \right)^2 \Rightarrow R = h \frac{\sqrt{ag}}{4\pi} = 4,33 \text{ см}. \quad (7)$$

Расстояние между нитями $h = (2,8 \pm 0,1) \text{ см}$.

Погрешность найденного значения рассчитывается по формуле

$$\Delta R = R \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta a}{a} \right)^2} = 4,33 \sqrt{\left(\frac{0,1}{2,8} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{0,009}{0,385} \right)^2} = 0,16 \text{ см}. \quad (8)$$

Часть 2. Малые колебания с дополнительным натяжением (5,0 балла)

2.1 Результаты измерений зависимости периода колебаний от силы натяжения нитей приведены в таблице 2.

Таблица 2.

z, мм	t ₁ , с	t ₂ , с	t ₃ , с	T, с	T ⁻² , с ⁻²
12	10,22	10,28	10,40	1,03	0,94
20	7,10	7,03	7,18	0,71	1,98
27	5,63	5,62	5,69	0,56	3,14
37	4,53	4,50	4,53	0,45	4,89
52	3,75	3,88	3,87	0,38	6,81

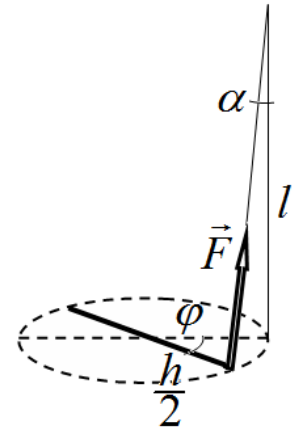
2.2 Момент возвращающей силы при наличии натяжения нитей \vec{F} пропорционален углу закручивания и модулю силы натяжения. Изменение силы натяжения при закручивании является поправкой более высоко порядка. Поэтому уравнение вращательного движения в данном случае имеет вид

$$I\ddot{\varphi} = -kF\varphi. \quad (9)$$

Следовательно, период этих колебаний обратно пропорционален корню из натяжения нитей

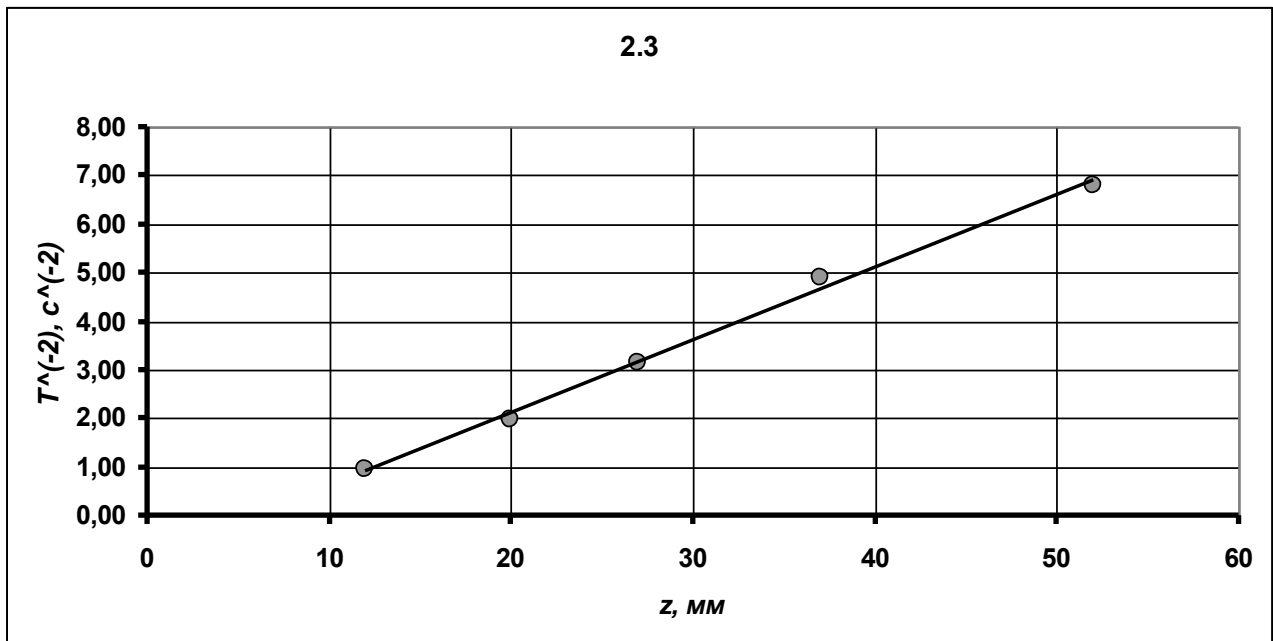
$$T = \frac{C}{\sqrt{F}} = \frac{A}{\sqrt{z}}, \quad (10)$$

где C, A – некоторые постоянные величины.



2.3 Для проверки данной зависимости следует построить график зависимости $T^{-2}(z)$. Другие виды линеаризации в данном случае менее надежны, так как при измерении деформации z почти неизбежно появление некоторой постоянной составляющей.

График зависимости $T^{-2}(z)$ показан на рис. 2.3.



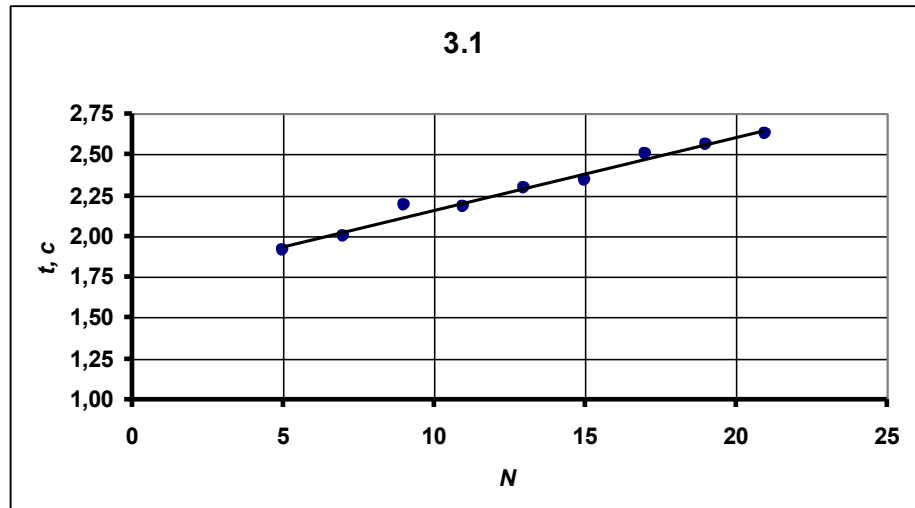
Полученная линейная зависимость подтверждает теоретический вывод о виде зависимости периода от силы натяжения нитей.

Часть 3. Закручивание на большие углы (5,0 балла)

3.1 Зависимость времени раскручивания от угла закручивания приведена в таблице 3 и на рис. 3.1

Таблица 3.

N	t, s
5	1,91
7	2,00
9	2,19
11	2,18
13	2,29
15	2,34
17	2,50
19	2,56
21	2,63

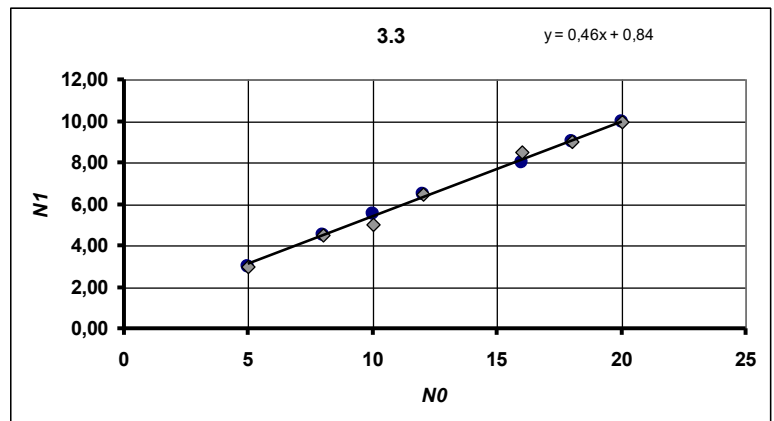


3.2 Время раскручивания можно считать как четверть периода колебаний. Время раскручивания увеличивается с ростом «амплитуды», это означает, что потенциальная энергия возрастает медленнее, чем при гармонических колебаниях, т.е. $\gamma < 2$.

3.3. Зависимость числа полуоборотов N_1 при повторном закручивании от начального закручивания N_0 приведена в таблице 4 и на графике 3.3. Полученные зависимости практически не зависят от силы натяжения нитей.

Таблица 4.

N_0	$z = 35mm$	$z = 20mm$
	N_1	N_1
20	10,0	10,0
18	9,0	9,0
16	8,0	8,5
12	6,5	6,5
10	5,5	5,0
8	4,5	4,5
5	3,0	3,0



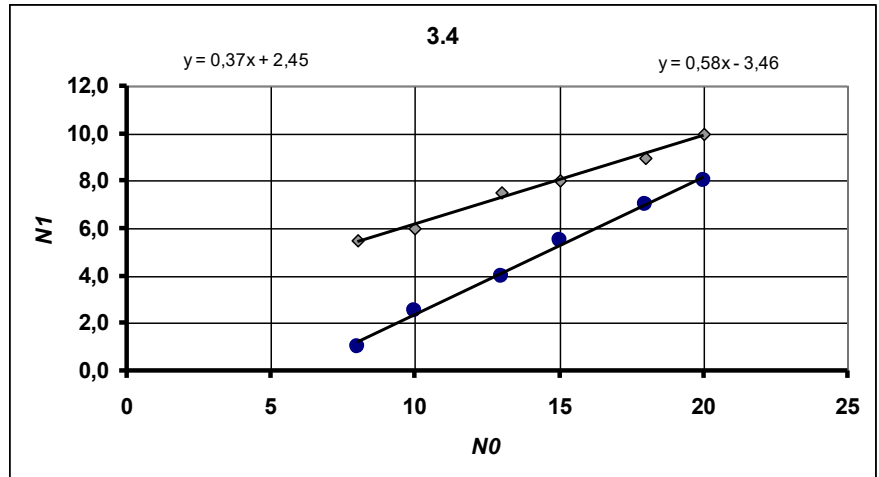
Данная зависимость может быть описана линейной функцией

$$N_1 = 0,46N_0 + 0,84 . \tag{11}$$

3.4-3.5 Зависимости числа полуоборотов N_1 при повторном закручивании от начального закручивания N_0 при подъеме с грузом и подъеме без груза приведены в таблице 5 и на графике 3.4. Полученные зависимости являются линейными. Существенно, что при подъеме без дополнительного груза значения N_1 заметно выше, что говорит о подкачке энергии в ходе опускания груза. Кроме того, последнюю зависимость нельзя считать прямо пропорциональной.

Таблица 5.

	С грузом	Без груза
N_0	N_1	N_1
20	8,0	10,0
18	7,0	9,0
15	5,5	8,0
13	4,0	7,5
10	2,5	6,0
8	1,0	5,5



Полученные зависимости могут быть описаны линейными функциями

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 0,58N_0 - 3,5 \\
 N_1 &= 0,37N_0 + 2,5
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Схема оценивания

	Критерии оценивания	Всего	Баллы
	Часть 1.Свободные малые колебания.	5	
1.1	Оценивается, если результаты измерений периодов отличаются от официальных не более чем на 25%.	2	
	Число различных значений длины: 5 и более (3-4; меньше 3);		0,8(0,4;0)
	Периоды измерены по времени Не менее 10 колебаний (5-9; менее 5);		0,3(0,1;0)
	Рассчитаны периоды для всех измерений;		0,2
	Диапазон изменения длины Не менее 40 см (30-40 см, 20-30 см; менее 20 см)		0,7 (0,5;0,3;0)
1.2	Вывод теоретической формулы: Получена точная формула $T = 4\pi \sqrt{\frac{I}{mg} \frac{l}{h^2}}$; Получен только вид зависимости $T = A\sqrt{l}$ (или не верный коэффициент при \sqrt{l})	0,5	0,5 (0,2)
1.3	Оценивается, если оценены результаты измерений п. 1.1! Предложена правильная линейризация $T^2(l)$, $T(\sqrt{l})$; Предложена линейризация $\ln T(\ln l)$ Доказана степень 1/2	1	0,5 (0,2) (0,3)
	Построение графика (не линейризованная зависимость не оценивается): - оси подписаны и оцифрованы;		0,1

	- Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1
	Получена линейная зависимость;		0,2
1.4	Оценивается, если оценены результаты измерений п. 1.1! Радиус инерции рассчитан по всем значениям периодов; <i>Расчет по 2 точкам;</i> <i>Расчет по 1 точке;</i>	1,5	0,3 (0,2) (0,1)
	Найден коэффициент наклона линеаризованной зависимости: По МНК; <i>Графически;</i>		0,2 (0,1)
	Измерено расстояние между нитями Указана погрешность		0,1 0,1
	Формула для расчета радиуса инерции		0,1
	Численное значение радиуса инерции в диапазоне: 4,2 – 4,4 см (4,0 – 4,6 см; вне диапазона)		0,4(0,2;0)
	Расчет погрешности: - погрешность коэффициента наклона; - погрешность расстояния между нитями; - общая погрешность;		0,1 0,1 0,1
	Часть 2. Малые колебания с натяжением	5	
2.1	Оценивается, если результаты измерений периодов отличаются от официальных не более чем на 50%.	2	
	Число различных значений натяжения: 5 и более (3-4; меньше 3);		0,8(0,4;0)
	Периоды измерены по времени Не менее 10 колебаний (5-9; менее 5);		0,3(0,1;0)
	Рассчитаны периоды для всех измерений;		0,2
	Диапазон изменения периодов колебаний Не менее чем в 2,5 раза (2,0 раза, 1,5 раз; менее)		0,7 (0,5;0,3;0)
2.2	Вывод теоретической формулы: Обоснована формула $T = \frac{A}{\sqrt{F}}$ (постоянство силы натяжения, возвращающий момент пропорционален F , уравнение колебаний); Указан вид зависимости $T = \frac{A}{\sqrt{F}}$ (без доказательства)	1	1,0 (0,3; 0,3; 0,4) (0,2)
2.3	Оценивается, если оценены результаты измерений п. 2.1! Предложена правильная линеаризация $T^{-2}(z)$; Предложена линеаризация $T\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ Предложена линеаризация $\ln T(\ln l)$, Доказана степень 1/2	2	1,0 (0,5) (0,3+0,2)
	Построение графика (не линеаризованная зависимость не оценивается): - оси подписаны и оцифрованы; - Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1 0,1
	Получена линейная зависимость;		0,7
	Часть 3. Закручивание на большие углы	5	
3.1	Оценивается, если результаты измерений времен отличаются от официальных не более чем на 50%.	1,0	

	Число различных значений N : 5 и более (3-4; меньше 3);		0,4 (0,2;0)
	Проведено не менее 3 повторных измерений;		0,1
	Получена возрастающая зависимость $t(N)$		0,2
	Построение графика (оценивается, если оценены результаты измерений): - оси подписаны и оцифрованы; - Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1 0,1
3.2	Показатель степени $\gamma < 2$ Обоснование: U возрастает медленнее, чем при гармонических колебаниях	0,3	0,2 0,1
3.3	Оценивается, если значения коэффициента наклона лежат в диапазоне 0,35-0,65	1,5	
	Число различных значений N_0 : 5 и более (3-4; меньше 3);		0,5(0,2;0)
	Проведено не менее 3 повторных измерений;		0,1
	Получена линейная возрастающая зависимость;		0,2
	Построение графика (оценивается, если оценены результаты измерений): - оси подписаны и оцифрованы; - Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1 0,1
	Предложена линейная функция; Найдены численные значения параметров функции;		0,1 0,2
	Коэффициенты наклона одинаковы для двух натяжений;		0,1
3.4	Оценивается, если значения коэффициента наклона лежат в диапазоне 0,25-0,65	1	
	Число различных значений N_0 : 5 и более (3-4; меньше 3);		0,3(0,1;0)
	Получена линейная возрастающая зависимость;		0,1
	Построение графика (оценивается, если оценены результаты измерений): - оси подписаны и оцифрованы; - Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1 0,1
	Предложена линейная функция; Найдены численные значения параметров функции;		0,1 0,2
3.5	Оценивается, если значения коэффициента наклона лежат в диапазоне 0,25-0,75 и есть сдвиг прямой!	1,2	
	Число различных значений N_0 : 5 и более (3-4; меньше 3);		0,4(0,2;0)
	Получена линейная возрастающая зависимость со сдвигом вверх;		0,2+0,1
	Построение графика (оценивается, если оценены результаты измерений): - Нанесены все экспериментальные точки; - проведена сглаживающая прямая;		0,1 0,1
	Предложена линейная функция; Найдены численные значения параметров функции;		0,1 0,2