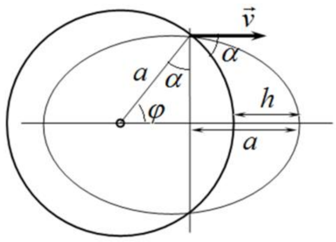
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Внимание: баллы в оценках не делятся!

Задача 1 (10,0 балла)

Задача 1A (4,0 балла)



При кеплеровом движении энергия, как и период, зависит только от большой полуоси, поэтому большая полуось орбиты брошенного камня равна радиусу планеты ($a = R$), а стартовая точка находится на малой полуоси, т.к. удалена от фокуса на a (см. рис.). Из рисунка получаем

$$R + h = a\sin\alpha + a$$

$$h = R\sin\alpha$$

Этот результат можно также получить, решив систему из законов сохранения энергии и момента импульса.

Дальность полёта равна $l = 2R\varphi = 2R(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1.	Найдена максимальная высота *ЗСЭ* *ЗСМИ* *Решена система* или *Есть соотношение $a = R$* *Оно обосновано* *Есть рисунок с длинами и углами* *Ответ*	**2** *0,5* *0,5* *1* *0,5* *0,5* *0,5* 0,5
2.	Найден угол φ ($\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$) Ответ на второй вопрос	1 1
Итого		**4.0**

Задача 1B (3,0 балла)

По определению теплоемкость равна

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + P\Delta V}{\Delta T} = C_V + P\frac{\Delta V}{\Delta T}. \quad (1)$$

Пусть в требуемой точке параметры газа равны (P_0,V_0,T_0). Тогда уравнение процесса имеет следующий вид

$$\frac{V}{V_0} + \frac{T}{T_0} = 2. \quad (2)$$

Для малых изменений получаем

$$\frac{\Delta V}{V_0} + \frac{\Delta T}{T_0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = -\frac{V_0}{T_0}. \quad (4)$$

Окончательно, с учётом равенства $P_0V_0 = RT_0$, получаем

$$C = C_V + P\frac{\Delta V}{\Delta T} = C_V - P_0\frac{V_0}{T_0} = C_V - R = \frac{R}{2}. \quad (5)$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1.	Присутствует выражение для C через производную	1.0
2.	Эта же производная найдена в точке A	1.0
3.	Есть правильный ответ ($C_V - R$ или $R/2$)	1.0
Итого		**3.0**

Задача 1С (3,0 балла)

Из соображений размерности потенциал в центре равномерно заряженного по объёму шара относительно бесконечно удаленной точки равен

$$\varphi \sim k\frac{q}{R} \sim \alpha\frac{\rho R^3}{R} \sim \alpha\rho R^2, \qquad (1)$$

где α – коэффициент пропорциональности, одинаковый для всех шаров.

Нашу систему зарядов можно представить как результат суперпозиции шара радиусом R, заряженного с плотностью $+\rho$, и шара радиусом r, заряженного с плотностью -2ρ. Тогда для потенциала в центре имеем

$$\alpha\rho R^2 + \alpha(-2\rho)r^2 = 0, \qquad (2)$$

откуда

$$\frac{R}{r} = \sqrt{2}. \qquad (3)$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1.	Для потенциала в центре присутствует формула $\varphi \sim \rho R^2$ Приведён вывод этой формулы Неправильный коэффициент пропорциональности из-за вычислительных ошибок Расчёт потенциала идейно неправилен	1.0 1.0 - 0.5 0 за п.1
2.	Применён принцип суперпозиции	0.5
3.	Правильный ответ для сфер	0.5
Итого		**3.0**

Задача 2. Равновесие с энергетической точки зрения (10,0 балла)

1. Введение (1,0 балла)

1.1 **[1,0 балла]** Изменение поверхностной энергии взаимодействия жидкости с твердым телом можно представить в виде

$$\Delta U_S = -(\sigma_2 - \sigma_1)\Delta S. \qquad (1)$$

Рассматривая малый отрезок Δl на границе капли можно записать условие его равновесия

$$(\sigma_2 - \sigma_1)\Delta l = \sigma_0 \Delta l \cos\theta. \qquad (2)$$

Из этих формул следует, что

$$\Delta U_s = -\sigma_0 \cos\theta \; \Delta S.$$

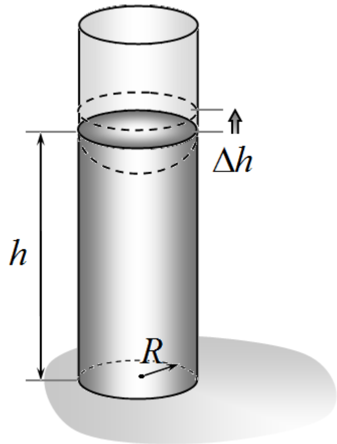
(3)

2. Вода в вертикальной цилиндрической трубке (2,0 балла)

2.1 **[0,5 балла]** Формула для изменения поверхностной энергии ΔU_S системы при дополнительном поднятии воды в трубке на малую высоту Δh имеет вид

$$\Delta U_S = -\sigma_0 \cos\theta \cdot \Delta S = -\sigma_0 \cos\theta \cdot 2\pi R \Delta h, \qquad (4)$$

где $\Delta S = 2\pi R \Delta h$ – изменение площади соприкосновения жидкости с внутренней поверхностью трубки.



2.2 **[0,5 балла]** Формула для изменения потенциальной энергии жидкости в поле тяжести ΔU_G при дополнительном поднятии воды в трубке на малую высоту Δh записывается в виде

$$\Delta U_G = \pi R^2 \Delta h \rho g h. \qquad (5)$$

При ее выводе учтено, что масса жидкости $\Delta m = \pi R^2 \Delta h \rho$ поднимается на высоту h.

2.3 **[1,0 балла]** Если $|\Delta U_S|$ превышает величину ΔU_G, то энергия системы при подъеме жидкости будет уменьшаться, следовательно жидкость будет продолжать подъем, в противном случае жидкость начнет опускаться. Вблизи положения равновесия суммарное изменение энергии должно быть равно нулю, отсюда следует, что

$$\sigma_0 \cos\theta \cdot 2\pi R \Delta h = \pi R^2 \Delta h \rho g h \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{2\sigma_0 \cos\theta}{\rho g R}. \tag{6}$$

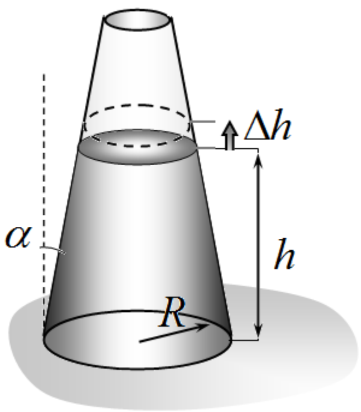
Подстановка численных значений приводит к результату

$$h_0 = \frac{2\sigma_0 \cos\theta}{\rho g R} = \frac{2 \cdot 0{,}072 \cdot \cos 20°}{1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}} = 1{,}4 \cdot 10^{-2}\, м = 14 мм. \tag{7}$$

3. Вода в вертикальной конической трубке (4,0 балла)

3.1 **[0,5 балла]** В этом случае формула для изменения поверхностной энергии ΔU_S системы при дополнительном поднятии воды в трубке на малую высоту Δh имеет вид

$$\Delta U_S = -\sigma_0 \cos\theta \cdot \Delta S = -\sigma_0 \cos\theta \cdot 2\pi r \frac{\Delta h}{\cos\alpha}. \tag{8}$$



Здесь $r = R - h\,tg\alpha$ – радиус трубки на высоте h.

3.2 **[0,5 балла]** Изменение потенциальной энергии жидкости в поле тяжести ΔU_G при дополнительном поднятии воды в трубке на малую высоту Δh определяется формулой

$$\Delta U_G = \pi r^2 \Delta h \rho g h. \tag{9}$$

3.3 **[1,0 балла]** Как и ранее, условию равновесия соответствует равенство модулей найденных изменений энергии

$$\sigma_0 \cos\theta \cdot 2\pi r \frac{\Delta h}{\cos\alpha} = \pi r^2 \Delta h \rho g h, \tag{10}$$

Подставляя выражение для радиуса трубки на высоте h, получим уравнение

$$\frac{2\sigma_0 \cos\theta}{R - h\,tg\alpha} = \rho g h \cos\alpha, \tag{11}$$

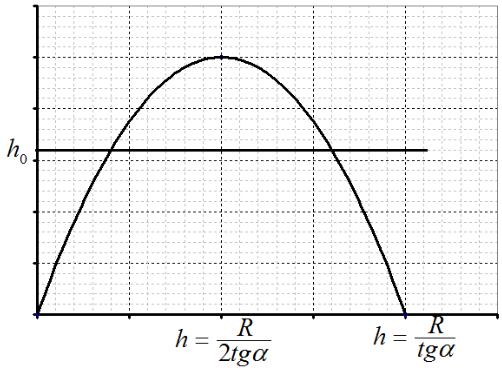
в котором легко выделить параметр h_0:

$$\frac{2\sigma_0 \cos\theta}{\rho g R\left(1 - \frac{h}{R} tg\alpha\right)} = h\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{h_0}{1 - \frac{h}{R} tg\alpha} = h\cos\alpha, \tag{12}$$

3.4 **[1,0 балла]** Полученное уравнение является квадратным относительно величины h. Поэтому следует разобраться с его корнями, или их отсутствием. Перепишем уравнение (12) в виде

$$h_0 = h\cos\alpha\left(1 - \frac{h}{R} tg\alpha\right) \tag{13}$$

Квадратичная функция, стоящая в правой части уравнения, имеет нули $h = 0$ и $h = \frac{R}{tg\alpha}$, поэтому она достигает максимального значения при $h = \frac{R}{2tg\alpha}$ и это значение равно $\frac{R}{4tg\alpha}\cos\alpha$. Следовательно, при $h_0 > \frac{R}{4tg\alpha}\cos\alpha$ уравнение (12) действительных корней



не имеет. В противном случае $h_0 < \frac{R}{4tg\alpha}\cos\alpha$ имеются два корня. При заданных параметрах трубки $\frac{R}{4tg\alpha}\cos\alpha = 25мм$, поэтому имеется два корня, соответствующих двум положениям равновесия. Несложно показать, что меньший корень дает устойчивое положение равновесия, а больший – неустойчивое. Численные значения этих корней равны

$$h = \frac{\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 4\frac{h_0}{R}\sin\alpha}}{2\frac{\sin\alpha}{R}} \quad \Rightarrow h_1 = 16{,}5мм,\ h_2 = 83{,}5мм$$

Таким образом, при $H < h_2$ вода в трубке установится на уровне h_1, если начальный уровень превысит h_2, то далее вода полностью заполнит всю трубку.

3.5 **[1,0 балла]** Вода полностью заполнит трубку при любом начальном H, если уравнение (12) корней не имеет. Это условие будет выполняться при

$$h_0 > \frac{R}{4tg\alpha}\cos\alpha\,, \tag{14}$$

или

$$\sin\alpha > \frac{R}{4h_0} = 0{,}018\,.$$

4. Вытекание воды (3,0 балла)

4.1 **[3,0 балла]** Вода начнет вытекать через отверстие только тогда, когда поверхность воды в отверстиях потеряет устойчивость. Это произойдет, если уменьшение потенциальной энергии в поле тяжести земли превысит по модулю увеличение поверхностной энергии. Это условие выражается неравенством

$$2\sigma_0\pi h^2 < 2\frac{\pi R^2 h^2}{6}\rho g\,, \tag{15}$$

из которого следует

$$R > \sqrt{\frac{6\sigma_0}{\rho g}} = 6{,}6мм \tag{16}$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы	
1	Выделен элемент линии границы	0,5	**1,0**
	Условие равновесия элемента (2) $(\sigma_2 - \sigma_1)\Delta l = \sigma_0 \Delta l \cos\theta$	0,5	
2.1	Формула (4) $\Delta U_S = -\sigma_0\cos\theta\cdot\Delta S = -\sigma_0\cos\theta\cdot 2\pi R\Delta h$	0.5	**0.5**
2.2	Формула (5) $\Delta U_G = \pi R^2\Delta h\rho gh$	0,5	**0,5**
2.3	Равенство измененей энергии (6) $\sigma_0\cos\theta\cdot 2\pi R\Delta h = \pi R^2\Delta h\rho gh \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{2\sigma_0\cos\theta}{\rho gR}$	0,5	**1,0**
	Формула (7) $h_0 = \frac{2\sigma_0\cos\theta}{\rho gR}$	0,2	
	Численное значение (правильно округленное) $h_0 = 1{,}4\cdot 10^{-2}м = 14мм$	0.3	
3.1	Формула (8) $\Delta U_S = -\sigma_0\cos\theta\cdot\Delta S = -\sigma_0\cos\theta\cdot 2\pi r\frac{\Delta h}{\cos\alpha}$	0,5	**0,5**

3.2	Формула (9) $\Delta U_G = \pi r^2 \Delta h \rho g h$	0,5	**0,5**
3.3	Уравнение (10) $\sigma_0 \cos\theta \cdot 2\pi r \dfrac{\Delta h}{\cos\alpha} = \pi r^2 \Delta h \rho g h$	0,5	**1.0**
	Уравнение (12) $\dfrac{2\sigma_0 \cos\theta}{\rho g R\left(1-\dfrac{h}{R}tg\alpha\right)} = h\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \dfrac{h_0}{1-\dfrac{h}{R}tg\alpha} = h\cos\alpha$	0,5	
3.4	Решение уравнения (12)	0,3	**1,0**
	Анализ устойчивости корней	0.5	
	Правильный результат	0,2	
3.5	Условие отсутстсвия корней $\sin\alpha > \dfrac{R}{4h_0}$	0,6	**1,0**
	Численное значение угла $\sin\alpha > 0,018$	0,4	
4.1	Формулировка основной идеи – измененение потенциальной энергии больше изменения поверхностной	1,5	**3,0**
	Неравенство (15) $2\sigma_0 \pi h^2 < 2\dfrac{\pi R^2 h^2}{6}\rho g$	1,0	
	Численное значение радиуса (правильно округленное) $R > \sqrt{\dfrac{6\sigma_0}{\rho g}} = 6,6 мм$	0,5	
Итого			**10,0**

Задача 3. Переменный конденсатор (10,0 балла)

1. **[0,75 балла]** Через достаточно большое время сила тока в цепи станет равной нулю, то есть конденсатор полностью зарядится

$$I = 0. \tag{1}$$

Все напряжение источника будет падать на конденсатор, емкость которого при напряжении $U_0 = 5$ В равна

$$C = 0{,}10 \text{ мкФ}. \tag{2}$$

Отсюда заряд конденсатора находится по формуле

$$q = CU_0 = 0.50 \text{ мкКл}. \tag{3}$$

2. **[0,25 балла]** Поскольку ток в цепи конечен, а заряд конденсатора до $U_0 = 10$ В потребует бесконечного заряда, то время зарядки равно.

$$t = \infty. \tag{4}$$

3. **[3,0 балла]** Пусть конденсатор имеет заряд q и его емкость при этом равна C, тогда для последовательной цепи имеем

$$U_0 = \frac{q}{C} + IR, \tag{5}$$

где сила тока в цепи равна

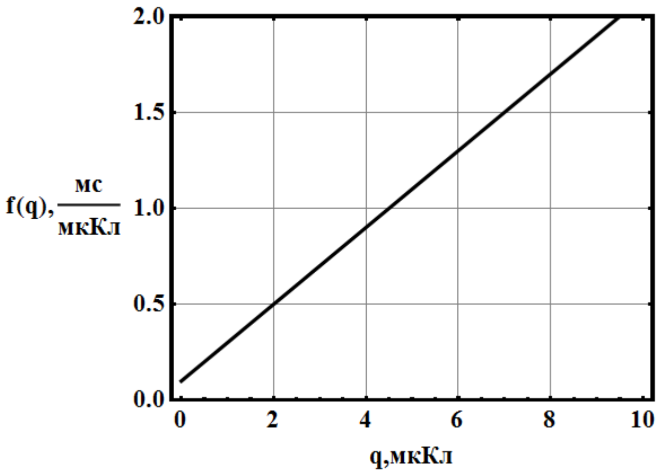
$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), перепишем его в виде

$$dt = \frac{R}{U_0 - \frac{q}{C(q)}} dq = f(q)dq, \tag{7}$$

где $f(q) = R/\left(U_0 - \frac{q}{C(q)}\right)$ – некоторая функция от заряда конденсатора.

Функция $f(q)$ легко строится графически по заданной функции $C = C(U)$ и имеет линейный вид, показанный на рисунке.



Уравнение прямой имеет вид

$$f(q) = a + bq, \tag{8}$$

$$a = 0.10\ \frac{\text{мс}}{\text{мкКл}}, \tag{9}$$

$$b = 0.20\frac{\text{мс}}{(\text{мкКл})^2}. \tag{10}$$

Время, через которое заряд конденсатора станет равным $q = 4$ мкКл, определяется в соответствии с (7) и (8) формулой

$$t = aq + \frac{1}{2}bq^2 = 2.0\ \text{мс} \tag{11}$$

4. **[0,5 балла]** Аналогично определяется время Δt, в течении которого заряд на конденсаторе увеличится с с $q_0 = 4$ мкКл до $q = 8$ мкКл

$$t = (q - q_0)\left(a + \frac{1}{2}b(q + q_0)\right) = 5.2\text{мс}. \tag{12}$$

5. **[0,5 балла]** Решая обратную задачу, из формулы (11) находим

$$q_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2bt}}{b}. \tag{13}$$

Очевидно, что в начальный момент времени $q(0) = 0$, поэтому в формуле (13) следует выбрать знак плюс, откуда

$$q = \frac{\sqrt{a^2 + 2bt} - a}{b} = 5{,}0\ \text{мкКл}. \tag{14}$$

6. **[0,5 балла]** В обычном конденсаторе заряд прямо пропорционален напряжению, то есть

$$q = CU, \tag{15}$$

а сила тока в цепи определяется выражением

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt} \sim \frac{dU}{dt}. \tag{16}$$

Так как конденсатор и сопротивление включены последовательно, то сила тока в них одинакова, а колебания напряжения на сопротивлении совпадают по фазе с колебаниями тока. Подстановка $U \sim \sin\omega t$ дает $I \sim \cos\omega t = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$, то есть разность фаз колебаний напряжений между конденсатором и сопротивлением составляет $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

В нашей схеме имеется нелинейный конденсатор, однако пропорциональность в формуле (16) сохраняется, так как колебания напряжения малы по сравнению с подаваемым постоянным напряжением, поэтому

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

7. **[4,0 балла]** Приложенное напряжение имеет постоянную и переменную составляющие. Через достаточно большое время постоянная составляющая напряжения будет целиком падать на конденсаторе, то есть

$$U_C = 5{,}000\ \text{В}, \tag{18}$$

а на сопротивлении постоянная составляющая напряжения будет равна нулю

$$U_R = 0. \tag{19}$$

В нашем случае емкость зависит от напряжения, поэтому (16) переписывается в виде

$$I = \frac{dq}{dt} = C(U)\frac{dU}{dt} + U\frac{dC(U)}{dU}\frac{dU}{dt} = C_{\text{eff}}\frac{dU}{dt}, \tag{20}$$

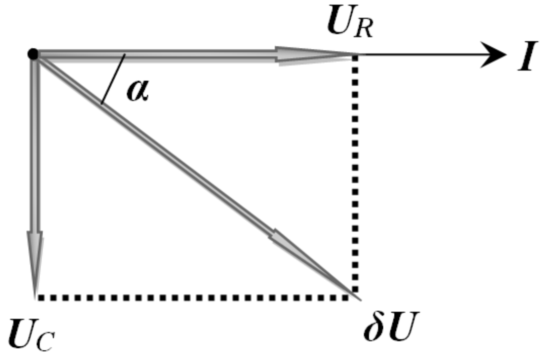
где эффективная емкость конденсатора

$$C_{\text{eff}} = C(U) + U\frac{dC(U)}{dU} = 0.200\ \text{мкФ}. \tag{21}$$

Известно, что сопротивление конденсатора переменному току равно

$$X_{\text{C}} = \frac{1}{\omega C_{\text{eff}}}. \tag{22}$$

Для вычисления силы тока воспользуемся векторной диаграммой, показанной на рисунке для последовательного соединения сопротивления и конденсатора.



Из нее следует, что амплитуда силы тока равна

$$I = \frac{\delta U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C_{\text{eff}}^2}}} = 44.7\ \text{мкА}. \tag{23}$$

а сдвиг фаз α между током в цепи и напряжением равен

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{U_C}{U_R}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega C_{\text{eff}} R}\right) = 1{,}11\ \text{рад} = 63{,}4°. \tag{24}$$

Окончательно, зависимость силы тока от времени имеет вид

$$I(t) = [44{,}7\sin(2500t + 1{,}1)]\ \text{мкА}. \tag{25}$$

8. **[0,5 балла]** Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе находится из векторной диаграммы и равна

$$U_C = \delta U \sin\alpha. \tag{26}$$

Окончательно, с учетом постоянной составляющей напряжения, получаем

$$U_{\text{C}}(t) = U_{\text{C}} + \delta U \sin\alpha \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$
$$= [5{,}000 + 0{,}089\sin(2500t - 0{,}464)]\ \text{В}. \tag{27}$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы	
1	Уравнение (1) $I = 0$	0.25	**0,75**
	Уравнение (2) $C = 0{,}10$ мкФ	0.25	
	Уравнение (3) $q = CU_0 = 0.50$ мкКл	0.25	
2	Уравнение (4) $t = \infty$.	0.25	**0,25**
3	Уравнение (5) $U_0 = \frac{q}{C} + IR$	0.25	**3.0**
	Уравнение (6) $I = \frac{dq}{dt}$	0.25	
	Уравнение (7) $dt = \frac{R}{U_0 - \frac{q}{C(q)}}dq = f(q)dq$ с функцией $f(q) = R/\left(U_0 - \frac{q}{C(q)}\right)$	0.25	
	Уравнение (8): обнаружено, что $f(q) = a + bq$	1.25	
	Уравнение (9) $a = 0.10\ \frac{\text{мс}}{\text{мкКл}}$	0.25	

	Уравнение (10) $b = 0.20\,\frac{\text{мс}}{(\text{мкКл})^2}$	0.25	
	Уравнение (11) $t = aq + \frac{1}{2}bq^2$	0.25	
	Численное значение в уравнении (11) $t = 2.0$ мс	0.25	
4	Уравнение (12) $t = (q - q_0)\left(a + \frac{1}{2}b(q + q_0)\right)$	0.25	**0.5**
	Численное значение в уравнении (12)	0.25	
5	Уравнение (14) $q = \frac{\sqrt{a^2+2bt}-a}{b}$	0.25	**0.5**
	Численное значение в уравнении (14)	0.25	
6	Уравнения (15), (16) или эквивалентные им	0.25	**0.5**
	Уравнение (17) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$	0.25	
7	Уравнение (18) $U_C = 5{,}000$ В	0,25	**4.0**
	Уравнение (20) $I = \frac{dq}{dt} = C(U)\frac{dU}{dt} + U\frac{dC(U)}{dU}\frac{dU}{dt} = C_{\text{eff}}\frac{dU}{dt}$	1,5	
	Уравнение (21): правильное значение $C_{\text{eff}} = 0.200$ мкФ	0.25	
	Уравнение (22) $X_{\text{C}} = \frac{1}{\omega C_{\text{eff}}}$	0,25	
	Правильная векторная диаграмма или импедансы	0,5	
	Уравнение (23) $I = \frac{\delta U}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2 C_{\text{eff}}^2}}}$	0,25	
	Уравнение (23): правильное числовое значение $I = 44.7$ мкА	0,25	
	Уравнение (24) $\alpha = \text{arctg}\left(\frac{1}{\omega C_{\text{eff}} R}\right)$	0,25	
	Уравнение (24): правильное числовое значение $\alpha = 1{,}11$ рад $= 63{,}4°$	0,25	
	Уравнение (25) $I(t) = [44{,}7\sin(2500t + 1{,}1)]$ мкА	0,25	
8	Уравнение (26) $U_C = \delta U \sin\alpha$	0.25	**0.5**
	Уравнение (27) $U_{\text{C}}(t) = [5{,}000 + 0{,}089\sin(2500t - 0{,}464)]$ В	0.25	
Итого			**10,0**