4. Найдите наибольшее натуральное n такое, что для любого натурального $k \leqslant \frac{n}{2}$ найдутся два натуральных делителя n с разностью k.

Решение. Ответ – 24. Это число, очевидно, удовлетворяет условию: $1 = 2-1$, $2 = 4-2$, $3 = 6-3$, $4 = 8-4$, $5 = 8-3$, $6 = 8-2$, $7 = 8-1$, $8 = 12-4$, $9 = 12-3$, $10 = 12-2$, $11 - 12 - 1$, $12 = 24 - 12$.

Предположим, что $n > 24$ удовлетворяет условию. Если n нечётно, у него нет делителей между n и $\frac{n}{3}$, поэтому $\frac{n-1}{2}$ должно иметь вид $n-d$, где d – делитель n. Но тогда $d = \frac{n+1}{2}$, очевидно, не делит n. Таким образом, n чётно.

Если $\frac{n}{3} \leqslant k < \frac{n}{2}$ и $k = d_1 - d_2$, где d_1 and d_2 – делители n, то $d_1 = \frac{n}{2}$ (поскольку, очевидно, $d_1 > \frac{n}{3}$, а при $d_1 = n$ число d_2 должно быть больше $\frac{n}{2}$). Поэтому для каждого такого k число $\frac{n}{2} - k$ – делитель n. Это означает, что n делится на все натуральные числа, не превосходящие $\frac{n}{6}$. Поскольку $n > 24$, оно делится на 3, 4 и, следовательно, на 12.

Числа $\frac{n}{6}$ и $\frac{n}{6} - 1$ взаимно просты и делят n. Поэтому n делится на их произведение, значит, $n \geqslant \frac{n}{6}\left(\frac{n}{6} - 1\right)$, то есть $n \leqslant 42$. Так как $12|n$, остаётся проверить число 36, которое не делится на $5 < \frac{36}{6}$ и потому не удовлетворяет условию.

5. Обозначим через A_n множество разбиений последовательности 1, 2, …, n на несколько подпоследовательностей, в каждой из которых любые два соседних члена имеют разную чётность, а через B_n – множество разбиений последовательности 1, 2, …, n на несколько подпоследовательностей, в каждой из которых все члены имеют одинаковую чётность (например, разбиение $\{(1,4,5,8),(2,3),(6,9),(7)\}$ является элементом A_9, а разбиение $\{(1,3,5),(2,4),(6)\}$ является элементом B_6).

Докажите, что при каждом натуральном n множества A_n и B_{n+1} содержат одинаковое количество элементов.

Решение. Для доказательства равенства $|A_n| = |B_{n+1}|$ мы построим биекцию между двумя видами разбиений.

Пусть A – разбиение первого вида, то есть в каждой подпоследовательности, входящей в A, чётности членов чередуются. Мы сопоставим этому разбиению разбиение B, заданное следующим правилом:

Два числа $x < y$ – соседние в некоторой подпоследовательности из A тогда и только тогда, когда x и $y+1$ – соседние в некоторой подпоследовательности из B.

Например, разбиению $\{(1,4,7,8),(2,5,10),(3,6),(9)\} \in A_{10}$ соответствует $\{(1,5,11),(2,6),(4,8),(3,7,9),(10)\} \in B_{11}$.

Из этого правила немедленно следует, что в каждой подпоследовательности из B все члены имеют одинаковую чётность, то есть $B \in B_{n+1}$.

Сопоставляя каждой паре (x,z) соседних членов подпоследовательности в любом разбиении $B \in B_{n+1}$ пару $(x, z-1)$ (в которой, очевидно, $x < z-1$ и числа x и $z-1$ одной чётности), мы получим единственное разбиение $A \in A_n$, переходящее в B. Таким образом, наше соответствие – биекция.

6. Площадь выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равна S, а радиусы описанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDE, DEA и EAB – R_1, R_2, R_3, R_4 и R_5. Докажите неравенство

$$R_1^4+R_2^4+R_3^4+R_4^4+R_5^4 \geqslant \frac{4}{5\sin^2 108^\circ}S^2.$$

Решение. Нам потребуется

Лемма 1. Площадь S выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ удовлетворяет неравенству

$$4S \leqslant A_nA_2\cdot R_1 + A_1A_3\cdot R_2+\ldots+A_{n-1}A_1\cdot R_n,$$

где R_i – радиус описанной окружности треугольника $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, $A_0=A_n$, $A_{n+1}=A_n$.

Пусть M_i – середина A_iA_{i+1} при $i=1,\ldots,n$. Для каждого i рассмотрим четырёхугольник, образованный отрезками A_iM_i и A_iM_{i-1}, а также перпендикулярами к этим отрезкам, восставленными в точках M_i and M_{i-1} соответственно. Мы докажем, что эти n четырёхугольников покрывают наш n-угольник. Действительно, пусть P – точка внутри n-угольника. Пусть PA_k – наименьшее из расстояний PA_1, PA_2, $\ldots$, PA_n. Имеем $PA_k\leqslant PA_{k+1}$ и $PA_k\leqslant PA_{k-1}$, поэтому P лежит в n-угольнике и в каждой из двух полуплоскостей, содержащих A_k и ограниченных серединными перпендикулярами к A_kA_{k+1} и A_kA_{k-1}, значит, в k-ом четырёхугольнике. Для завершения доказательства осталось заметить, что площадь i-го четырёхугольника не превосходит $\frac{1}{2}\cdot\frac{A_{i-1}A_{i+1}}{2}\cdot R_i$.

В условиях нашей задачи отсюда следует, что $4S\leqslant 2R_1^2\sin\angle A_1+2R_2^2\sin\angle A_2+\ldots+2R_5^2\sin\angle A_5$. Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$2S\leqslant R_1^2\sin\angle A_1+R_2^2\sin\angle A_2+\ldots+R_5^2\sin\angle A_5\leqslant\sqrt{(R_1^4+\ldots+R_5^4)(\sin^2\angle A_1+\ldots+\sin^2\angle A_5)}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{5(R_1^4+\ldots+R_5^4)\sin^2 108^\circ},$$

таким образом

$$\frac{4S^2}{5\sin^2 108^\circ}\leqslant R_1^4+R_2^4+\ldots+R_5^4.$$

В вышеприведённом неравенстве была использована

Лемма 2. Если α_1, α_2, $\ldots$, α_5 – углы выпуклого пятиугольника, то $\sin^2\alpha_1+\ldots+\sin^2\alpha_5\leqslant 5\sin^2 108^\circ$.

Оцениваемая сумма не зависит от порядка углов, поэтому можно считать, что $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_5$.

Если $\alpha_1=108^\circ$, то $\alpha_2=\ldots=\alpha_5=108^\circ$, и неравенство обращается в равенство.

Если $\alpha_1<108^\circ$, то $\alpha_5>108^\circ$. Заметим, что $\alpha_1+\alpha_5<270^\circ$ (если $\alpha_1+\alpha_5\geqslant 270^\circ$, то $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\leqslant 270^\circ$, поэтому $\alpha_2\leqslant 90^\circ$, тем более $\alpha_1\leqslant 90^\circ$ и, следовательно, $\alpha_5\geqslant 180^\circ$ – противоречие). Поэтому

$$\sin^2 108^\circ+\sin^2(\alpha_1+\alpha_5-108^\circ)-\sin^2\alpha_1-\sin^2\alpha_5=2\cos(\alpha_1+\alpha_5)\sin(\alpha_1-108^\circ)\sin(\alpha_5-108^\circ)>0.$$

Это значит, что замена α_1 на 108° и α_5 на $\alpha_1+\alpha_5-108^\circ$ увеличивает сумму квадратов синусов. Повторяя эту операцию, мы сделаем все углы равными 108°, и неравенство будет доказано.