

1. Каждая точка плоскости с целыми координатами покрашена в белый или голубой цвет. Докажите, что можно выбрать цвет так, чтобы при каждом натуральном n нашёлся треугольник площади n с тремя вершинами выбранного цвета.

Решение. Если каждые две соседние точки (то есть точки на расстоянии 1) разного цвета, то получается одноцветная решётка из квадратов $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, в которой легко найти треугольник любой натуральной площади.

Если это не так, рассмотрим две соседние точки A и B ($AB = 1$) одного цвета (скажем, белого). Чтобы найти треугольник площади n , нам нужна белая точка на прямой, проходящей параллельно AB на расстоянии $2n$. Если такая точка найдётся для каждого n , утверждение доказано. В противном случае существует прямая ℓ , целиком заполненная голубыми точками.

Рассмотрим прямую ℓ_1 , “соседнюю с ℓ ”, то есть проходящую параллельно ℓ на расстоянии 1 от неё. Если на ней есть голубая точка, то имеется треугольник с голубыми вершинами площади $\frac{n}{2}$ для каждого натурального n .

Единственный оставшийся случай – когда прямая ℓ_1 содержит только белые точки. Тогда мы рассмотрим прямую $\ell_2 \neq \ell_1$ на расстоянии 1 от ℓ_1 , и, как и выше, если на ней есть белая точка, утверждение доказано. А если все точки ℓ_2 голубые, то для каждого натурального n найдётся треугольник площади n с тремя голубыми вершинами.

2. Точка M лежит внутри треугольника ABC . Прямая BM пересекает сторону AC в точке N . Точка K симметрична M относительно AC . Прямая BK пересекает AC в точке P . Докажите, что если $\angle AMP = \angle CMN$, то $\angle ABP = \angle CBN$.

Решение. Пусть D, E и F – основания перпендикуляров, опущенных из A на BP, MP и BM соответственно, а G, Q и H – основания перпендикуляров, опущенных из C на BP, MP и BM соответственно.

Заметим, что $\triangle AFM \sim \triangle CQM$ и $\triangle AME \sim \triangle CMH$, следовательно, $\frac{AF}{CQ} = \frac{AM}{CM} = \frac{AE}{CH}$. В силу симметрии $CQ = CG, AE = AD$ и $\angle FAD = \angle FBD = \angle GCH$, поэтому $\frac{AF}{CG} = \frac{AD}{CH}$. Отсюда следует, что $\triangle FAD \sim \triangle GCH$, таким образом, $\angle AFD = \angle CGH$.

Далее, точки A, B, F, D лежат на одной окружности, поэтому $\angle ABP = \angle AFD$, и аналогично $\angle CBN = \angle CGH$. Сопоставляя это равенство с результатом предыдущего абзаца, получаем $\angle ABP = \angle CBN$.

3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2f(x) + y^2f(y) + f(xy)$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. В данное уравнение

$$f(x^3 + y^3 + xy) = x^2f(x) + y^2f(y) + f(xy) \quad (1)$$

подставим $x = 1, y = 0$ и получим $f(0) = 0$.

Возьмем в (1) $y = 0$, будем иметь

$$f(x^3) = x^2f(x). \quad (2)$$

Подстановка в (1) $y = -x$ дает

$$f(-x^2) = x^2f(x) + x^2f(-x) + f(-x^2) \Rightarrow f(-x) = -f(x). \quad (3)$$

Из (1) и (3) имеем

$$\begin{aligned} & f(x^3 + y^3 + xy) + f(x^3 - y^3 - xy) \\ &= x^2f(x) + y^2f(y) + f(xy) + x^2f(x) - y^2f(y) - f(xy) = 2x^2f(x) = 2f(x^3). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ найдутся $x, y \in \mathbb{R}$ такие, что

$$a = x^3 + y^3 + xy, \quad b = x^3 - y^3 - xy.$$

Для этого достаточно взять x, y из равенств

$$x^3 = \frac{a+b}{2}, \quad y^3 + xy = \frac{a-b}{2}$$

(тут левые части – функции, принимающие все действительные значения). Таким образом, (4) можно записать в виде

$$f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Отсюда также имеем

$$f(0) + f(a+b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow f(a+b) = f(a) + f(b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Теперь сделаем в (2) замену $x \rightarrow x+1$, обозначение $c = f(1)$, доказанную нами аддитивность f , и получим

$$\begin{aligned} & f((x+1)^3) = (x+1)^2f(x+1) \\ \Leftrightarrow & f(x^3) + 3f(x^2) + 3f(x) + c = (x^2 + 2x + 1)(f(x) + c) \\ \Leftrightarrow & 3f(x^2) = (2x-2)f(x) + (x^2 + 2x)c \end{aligned} \quad (5)$$

Заменив в (5) $x \rightarrow -x$, получим

$$3f(x^2) = (-2x-2)f(-x) + (x^2 - 2x)c = (2x+2)f(x) + (x^2 - 2x)c \quad (6)$$

Приравнивая правые части (5) и (6), получим

$$f(x) = cx.$$

Проверка подтверждает, что при всех $c \in \mathbb{R}$ такая функция будет удовлетворять условию задачи.

Ответ: $f(x) = cx, c \in \mathbb{R}$.